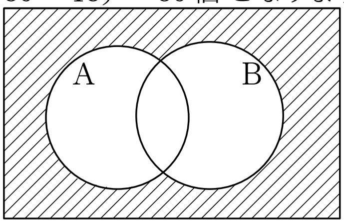
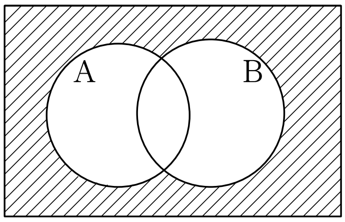
第 3 章　整数の性質

研究　自然数の積と素因数の個数

247 N 以下の N と互いに素な整数の個数について．これは一般に『オイラー関数』と言われる専門家の間では非常に重要な関数を使えば一発で求められますが，真面目にやれば・・・・結構メンドウです．
(1) だけやってみましょう．$108 = 2^2 \times 3^3$ なので，108 と互いに素な整数は素因数 2 や 3 をもってはいけません．素因数 2 をもつ数とは 2 の倍数のこと，素因数 3 をもつ数とは 3 の倍数のことなので，ベン図で表すと下のようになります（集合 A は 2 の倍数，集合 B は 3 の倍数を表すとします）．このとき求める数は図の斜線部分になります．
108 以下の自然数で 2 の倍数は 54 個，3 の倍数は 36 個，6 の倍数は 18 個．
したがって，斜線部分の個数は $108 - (54 + 36 - 18) = 36$ 個 となります．



(2) は $400 = 2^4 \times 5^2$ なので 2 の倍数と 5 の倍数が登場するベン図を描けばよく，手法は (1) と同じ．
(3) は $600 = 2^3 \times 3^1 \times 5^2$ なので 2 の倍数と 3 の倍数と 5 の倍数が登場するので，今度は 3 つの円が重なるベン図になります．



最後に，オイラー関数の威力を見せましょう．次のような不思議な計算で求めることができます．
(1) について．$108 = 2^2 \times 3^3$ なので，108 と互いに素な整数の個数は

$$108\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right) = 108 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 36$$

(2) について．$400 = 2^4 \times 5^2$ なので，400 と互いに素な整数の個数は

$$400\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) = 400 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = 160$$

(3) について．$600 = 2^3 \times 3^1 \times 5^2$ なので，600 と互いに素な整数の個数は

$$600\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) = 600 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = 160$$

以上，完璧に答えが合っています．不思議ですね．これらの計算式が何を意味しているのか気になる人は自分で調べてください．分からなければ質問に来てください．

248 犬プリ『素因数の個数』に詳しく書いてあるので，そちらを参照してください．ある意味，方法を知らないと解けないパターン問題です．

249 犬プリ『素因数の個数』に詳しく書いてあるので，そちらを参照してください．ある意味，方法を知らないと解けないパターン問題です．