第3章　整数の性質

第2節　ユークリッドの互除法

4　ユークリッドの互除法

5　1次不定方程式

$\boxed{255}$〜$\boxed{258}$ですが，かなり問題数が多いので*印だけでよいと思います．全部やると心身ともに疲れるでしょう．特に$\boxed{258}$は気が変になりそうです．

$\boxed{255}$ $\boxed{227}$でも 2 数の最大公約数を求めましたが，あの時は，それぞれの数を素因数分解しました．なぜなら，簡単に素因数分解できる数字同士だったからです，今回のように素因数分解がすぐに思いつかない場合は，ユークリッドの互除法を使うことになります．

▷Point◁ (ユークリッドの互除法)

自然数 a と b に対して，a を b で割ったときの商を q，余りを r とするとき，a と b の最大公約数は b と r の最大公約数に等しい．

m と n の最大公約数を $(m,\ n)$ と書くならば，上の内容は

$$(a,\ b) = (b,\ r)$$

と表現できます．

ためしに (3) と (4) をやってみます．

$$\begin{aligned} 923 &= 377 \times 2 + 169 \\ 377 &= 169 \times 2 + 39 \\ 169 &= 39 \times 4 + 13 \\ 39 &= 13 \times 3 + 0 \end{aligned}$$

よって，923 と 377 の最大公約数は 39 と 13 の最大公約数に等しいので，最大公約数は 13 になります．

$$\begin{aligned} 498 &= 223 \times 2 + 52 \\ 223 &= 52 \times 4 + 15 \\ 52 &= 15 \times 3 + 7 \\ 15 &= 7 \times 2 + 1 \end{aligned}$$

よって，498 と 223 の最大公約数は 15 と 7 の最大公約数に等しいので，最大公約数は 1，つまり互いに素になります．

このように，順番に割り算していけば，最大公約数が自動的に出てくるのですが，なかなかメンドウなものです．犬プリ『ユークリッドの互除法入門』で簡単な表記法を紹介してあるので参照してください．

$\boxed{256}$ $ax + by = c$ を満たす $(x,\ y)$ ですが，係数 a，b が小さければカンを働かせてテキトーに答えを出すことはできますが，それなりに大きな数になると無理です．

そこで，『座標筆算法』という手法を用います．これは本当に素晴らしい方法です．犬プリを参照してください．

$\boxed{257}$ 今度は係数が小さい場合なので，1 個は簡単に見つかるでしょう．ところが「全て求めよ」となっているので，もう少し作業が必要です．

(1) をやってみます．

$5x + 8y = 1$ を満たす整数 x，y をカンを働かせて見つけます．$x = -3$，$y = 2$ が思いつくでしょう．元の式と，$x = -3$，$y = 2$ を代入した式を並べて書きます．

$$\begin{aligned} 5 \times x \quad &+ \quad 8 \times y &= 1 \\ 5 \times (-3) \quad &+ \quad 8 \times (2) &= 1 \end{aligned}$$

上の 2 式の辺々を引くと

$$5(x+3) + 8(y-2) = 0$$

つまり，$5(x+3) = 8(2-y)$ となり，5 と 8 は互いに素なので，$x+3$ が 8 の倍数にならねばなりません．つまり，

$$x + 3 = 8k \qquad \therefore x = 8k - 3$$

このとき，$5 \cdot 8k = 8(2-y)$ より，$5k = 2-y$．つまり，$y = -5k + 2$．

以上より，

$$(x,\ y) = (8k-3,\ -5k+2)$$

となります．この式の k にいろいろな整数を代入すれば，$5x + 8y = 1$ の解がどんどん出てくるのです．

(4) をやってみます．

$9x - 5y = 7$ ですが，$\boxed{256}$(3) と同様に，$9x - 5y = 1$ を考えても良いですが，係数が小さいのでこのままやってみます．

この式を満たす整数 x，y をカンを働かせて見つけます．$x = 3$，$y = 4$ が思いつくで

しょう．元の式と，$x=4$，$y=7$ を代入した式を並べて書きます．

$$\begin{array}{lcll} 9\times x & - & 5\times y & =7 \\ 9\times 3 & - & 5\times 4 & =7 \end{array}$$

上の 2 式の辺々を引くと

$$9(x-3)-5(y-4)=0$$

つまり，$9(x-3)=5(y-4)$ となり，5 と 9 は互いに素なので，$x-3$ が 5 の倍数にならねばなりません．つまり，

$$x-3=5k \qquad \therefore x=5k+3$$

このとき，$9{\cdot}5k=5(y-4)$ より，$9k=y-4$．つまり，$y=9k+4$．
以上より，

$$(x,\ y)=(5k+3,\ 9k+4)$$

となります．この式の k にいろいろな整数を代入すれば，$9x-5y=7$ の解がどんどん出てくるのです．

258 256 と 257 の融合問題．要するに，とにかく 1 組を見つければ，あとは単純です．
1 組の見つけ方は，もちろん『座標筆算法』です．
(1) だけやってみます．
$30x+17y=2$ を満たす x，y を『座標筆算法』により見つけると $x=8$，$y=-14$ であることがわかります．
元の式と，$x=8$，$y=-14$ を代入した式を並べて書きます．

$$\begin{array}{lcll} 30\times x & + & 17\times y & =2 \\ 30\times 8 & + & 17\times(-14) & =2 \end{array}$$

上の 2 式の辺々を引くと

$$30(x-8)+17(y+14)=0$$

つまり，$30(x-8)=17(-y-14)$ となり，30 と 17 は互いに素なので，$x-8$ が 17 の倍数にならねばなりません．つまり，

$$x-8=17k \qquad \therefore x=17k+8$$

このとき，$30\cdot 17k=17(-y-14)$ より，$30k=-y-14$．つまり，$y=-30k-14$．

以上より，

$$(x,\ y)=(17k+8,\ -30k-14)$$

となります．この式の k にいろいろな整数を代入すれば，$30x+17y=2$ の解がどんどん出てくるのです．

259 まずは，上の例題 36 を参照してください．2 つの数の最大公約数を見つけるには，因数分解する，無理ならユークリッドの互除法，というのが基本ですが，今回のように，「$11n+28$ と $4n+7$ の最大公約数」なんて言われたら，因数分解どころの話ではないので，ユークリッドの互除法を使うしかありません．ていうか，むしろ「文字式の場合でもユークリッドの互除法が使えるなんてすごいなあ」と感心するための問題でしょう．
(1) は

$$\begin{array}{rl} 11n+28 & =(4n+7)\times 2+3n+14 \\ 4n+7 & =(3n+14)\times 1+n-7 \\ 3n+14 & =(n-7)\times 3+35 \end{array}$$

よって，$11n+28$ と $4n+7$ の最大公約数は $n-7$ と 35 の最大公約数に等しい．
よって最大公約数が 5 になるには，$n-7$ が 5 の倍数であり，かつ 7 の倍数でない．
$1\leqq n\leqq 50$ より，$-6\leqq n-7\leqq 43$ なので，

$$n-7=-5,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30,\ 40$$

となります．
(2) は

$$\begin{array}{rl} 6n+4 & =(5n+1)\times 1+n+3 \\ 5n+1 & =(n+3)\times 5-14 \end{array}$$

よって，$6n+4$ と $5n+1$ の最大公約数は $n+3$ と -14 の最大公約数に等しい．
あとは勝手にやってください．

260 255 (4) を思い出してください．割り算を繰り返して最後に 1 余れば「互いに素」でした．これを利用します．
つまり，(1) の場合，

$$3m+2=3m+1\times 1+1$$

なので，$3m+2$ と $3m+1$ の最大公約数は，$3m+1$ と 1 の最大公約数つまり 1 に等し

く，このことから互いに素であることがわかります．

(2) の場合は

$$n^2+n+1=(n+1)\times n+1$$

なので，n^2+n+1 と $n+1$ の最大公約数は，$n+1$ と 1 の最大公約数つまり 1 に等しく，このことから互いに素であることがわかります．

互いに素であることの証明方法はいくつかあって，一般的には次の方法で求めると思います．簡単に紹介しましょう．

(1) $3m+2$ と $3m+1$ が互いに素でないと仮定すると，共通の素因数 p が存在し，

$$3m+1=p\alpha\cdots①$$

$$3m+2=p\beta\cdots②$$

② − ① より，

$$p(\beta-\alpha)=1$$

p は素数なので矛盾．

(1) n^2+n+1 と $n+1$ が互いに素でないと仮定すると，共通の素因数 p が存在し，

$$n^2+n+1=p\alpha\cdots①$$

$$n+1=p\beta\cdots②$$

① − ② より，

$$n^2=p(\alpha-\beta)$$

よって，n^2 は p の倍数なので，n も p の倍数．これは ② に矛盾．

これらの証明の方が，しっくりきます．

261 ユークリッドの互除法でやってみましょう．

$$n^2+n+6=(n+5)\times(n-4)+26$$

つまり，n^2+n+6 と $n+5$ の最大公約数は，$n+5$ と 26 の最大公約数に等しい．

26 の公約数は 1，2，13，26 なので，こららの数字全てが最大公約数になる可能性があります．

262 (1) は 5 で割ると 3 余り，14 で割ると 5 余る数なので，$5x+2=14y+5$，つまり $5x-14y=3$ という式が成立します．

あとは $\boxed{256}$ の要領で，この式をみたす x，y を k を使って書き表し，例えば $5x+2$ が 3 桁の整数になるようなもののうち最大と最小を探せばよいだけ．

しかしながら「あること」に気づけば，最小の整数だけ分かれば最大の整数も簡単に作りだせるんですけどね．

裏の解答を見て最大の数と最小の数の差がある数の倍数になってないですかね？

数が等間隔に規則的に並んでいる様子をイメージしてください．

263 上の例題 37 と同じなんですが，ちょっと大げさです．答えが出れば，少々やりかたがまずくても構いませんよ．基本はコツコツ書き出して調べ上げること．しかしながら，ただ闇雲に書き出すのではなく，ある程度の根拠は必要でしょう．

例えば (1) は，$7x+2y=41$ を満たす自然数なので，$7x$ の部分に注目すると，x の候補は 1， 2， 3， 4， 5 しかありません．しかし $2y$ は偶数なので，41 が奇数であることを考慮すると $7x$ も奇数，つまり x も奇数でなければなりません．よって x の候補は 1， 3， 5 にさらに絞り込めます．

(2) は，$3x+4y=36$ を満たす自然数なので，$4y$ の部分に注目すると，y の候補は 1， 2， 3， 4， 5， 6， 7， 8 しかありません．しかし $3x$ は 3 の倍数で，36 も 3 の倍数であることを考慮すると $4y$ も 3 の倍数，つまり y も 3 の倍数でなければなりません．よって y の候補はさらに絞り込めます．

(3) も同様．(1)(2) を参考にやってください．

264 これもテキトーに数をいれて見つけてください．

$4x+2y+z=15$ より，x は 1， 2， 3， のどれかです．それぞれの場合を検証してみましょう．

僕が思うに，整数問題はスマートに解くのもかっこいいですが，やはりコツコツ調べ上げる労を惜しんではいけません．その中で規則性や法則を自分で見つけていくのです．

$\boxed{265}$ 一瞬，サンスーの問題かと思ってしまいますが，式を立てれば $\boxed{258}$ みたいな感じになります．
それにしても「消費税は考えない」って面白いですね〜．この時期ややこしいからね．