第３章　整数の性質
補充　いろいろな方程式の整数解

この単元の問題は超重要です．絶対にマスターしておこう．

原則的に，方程式を解くには，求める解の個数だけ式が必要なのですが，整数解の場合は，2 文字で式 1 個でも解くことができます．

そのためには，解の候補を絞り込む必要があって，その代表的な手段が次の 2 つ．

▷Point◁（解の絞込み方）

① 積の形を作る
② 不等式で範囲を絞り込む

具体的に見ていこう．詳しくは犬プリで解説してあります．

266 積の形を作る基本形．このタイプの式変形は必ずできるようにしておこう．(1) と (3) だけやってみます．

(1) $xy-5x-y=0$ より，

$(x-1)(y-5)-5=0$．よって，

$$(x-1)(y-5)=5$$

したがって，$x-1$ と $y-5$ の組合せが決定します．

$x-1$	1	5	-1	-5
$y-5$	5	1	-5	-1

あとは各自で．

(3) $xy+3x-4y=18$ より，

$(x-4)(y+3)+12=18$．よって，

$$(x-4)(y+3)=6$$

したがって，$x-4$ と $y+3$ の組合せが決定します．

$x-4$	1	2	3	6	-1	-2	-3	-6
$y+3$	6	3	2	1	-6	-3	-2	-1

あとは各自で．

267 パッと見てすぐに因数分解が思いつくはず．

(1) は，$(x-y)(x+y)=25$.

(2) は・・・・もういいですね．

268 分数の形をしていますが，分母を払って整理すれば 266 と全く同じになります．

例えば，(1) は両辺に xy をかけると

$y+2x=xy$．つまり

$$xy-2x-y=0$$

266 の (1) とほとんど同じですね．(2)(3) も同様です．

269 重要な問題．式の対称性と大小関係を利用して範囲を絞り込みます．とても重要な考え方です．

(1) の場合，$x \leqq y \leqq z$ より，

$$\frac{1}{x} \geqq \frac{1}{y} \geqq \frac{1}{z}$$

です．$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$ なので，次のような大小比較が可能です．

一番小さい $\dfrac{1}{z}$ で比較する場合

$$1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geqq \frac{1}{z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{z}$$

よって，$1 \geqq \dfrac{3}{z}$ より，$z \geqq 3$ なので z は確定しません．

一番大きい $\dfrac{1}{x}$ で比較する場合

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x} \geqq \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$$

よって，$\dfrac{3}{x} \geqq 1$ より，$3 \geqq x$ なので $x=1,\ 2,\ 3$ と確定します．

このようにうまくいく場合といかない場合があるので，いろいろ試行錯誤して調べましょう．

数が確定したら，あとは，$x=1,\ 2,\ 3$ のそれぞれの場合を検証します．例題 39 のように再び大小比較しても良いし，268 のような形にして考えてもかまいません．

(2) も同じようにやってください．

270 これも大小比較です

a で比較してみると，

$$abc=a+b+c \geqq a+a+a$$

つまり

$$abc \geqq 3a$$
$$bc \geqq 3$$

これは失敗．bc の範囲が絞り込めていません．
次に c で比較してみると，

$$abc = a + b + c \leqq c + c + c$$

つまり

$$abc \leqq 3c$$
$$ab \leqq 3$$

これは成功．うまく ab の範囲を絞り込めました．

$$ab = 1,\ 2,\ 3$$

やはり，この問題も試行錯誤して自力で見つけてほしいところです．
あとは，それぞれ調べるだけなので大丈夫でしょう．例えば，$ab = 1$ のときは $(a,\ b) = (1,\ 1)$ だし，$ab = 2$ のときは $(a,\ b) = (1,\ 2)$ です．ここでも $a \leqq b \leqq c$ を忘れないように．
注　2006 年の東京大学でこれとほとんど同じ問題が出題されています．興味ある人は調べてみてください．

$\boxed{271}$ これまで通り，大小関係の不等式を利用して範囲を絞り込みます．
まず，$2 \leqq p < q < r$ より，
$\dfrac{1}{2} \geqq \dfrac{1}{p} > \dfrac{1}{q} > \dfrac{1}{r}$．したがって，

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p} > \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$$

よって，$\dfrac{3}{p} > 1$ より，$3 > p$ なので $p = 2$ と確定します．
このとき，

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{r} > \frac{1}{2}$$

になるので，再び範囲を絞り込むと，

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q} > \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > \frac{1}{2}$$

よって，$\dfrac{2}{q} > \dfrac{1}{2}$ より，$4 > q$．$p = 2 < q$ なので $q = 3$ と確定します．
このとき，

$$\frac{1}{r} > \frac{1}{6}$$

なので，$6 > r$．$q = 3 < r$ より，$r = 4,\ 5$ となります．