第 3 章　整数の性質

補　合同式で表される方程式

272 (1)(2)(3) 三者三様の重要問題です．似てるようで全然解き方が違います．
通常の 1 次方程式 $ax=b$ ($a \fallingdotseq 0$) は両辺を a で割ることによって，$x=\dfrac{b}{a}$ と解くことができますが，合同式の 1 次方程式の場合はそうはいきません．なぜなら合同式における割り算には何かと制約があるからです．

$$ax \equiv b \pmod{m}$$

両辺を a で割りたい気持ちは分かりますが，絶対に割ってはいけません．その都度，意味を考えて処理せねばなりません．
(1) の場合．

$$7x \equiv 3 \pmod{5}$$

ですが，言い換えれば，$7x-3=5k$.
つまり，$7x-5k=3$ を満たす x を求めることになります．$x=4$，$k=5$ が見つかれば優秀です．よって，

$$\begin{array}{rcrl} 4\times x & - & 5\times k & =3 \\ 4\times 4 & - & 5\times 5 & =3 \end{array}$$

$$4(x-4)-5(k-5)=0$$

すなわち

$$4(x-4)=5(k-5)$$

4 と 5 は互いに素だから，$x-4=5l$
よって，$x \equiv 4 \pmod{5}$．これが答え．
また，両辺にある数を掛けて左辺の x の係数を 1 にする方法もあります．つまり，両辺を 3 倍すると，

$$21x \equiv 9 \pmod{5}$$
$$x \equiv 4 \pmod{5}$$

となります．一瞬で解けました．
でも「かけて 1 になるなんて，うまくいきすぎてる．ホンマにそんなことあるんか？」と思うかもしれませんが，大丈夫です．詳しくは犬プリ「余りの美しさ」を参照してください．

(2) の場合．

$$5x \equiv 15 \pmod{13}$$
$$5(x-3) \equiv 0 \pmod{13}$$

5 と 13 は互いに素なので，$x-3=13k$
よって，$x \equiv 3 \pmod{13}$．これが答え．
また，先ほどと同じく両辺に何か数字をかける方法では，まず，両辺を 8 倍すると，

$$40x \equiv 120 \pmod{13}$$
$$x \equiv 3 \pmod{13}$$

となります．これまた一瞬で解けました．
なぜ，8 倍したのか不思議ですねえ．
(3) の場合．これは注意が必要です．

$$4x \equiv 8 \pmod{12}$$
$$4(x-2) \equiv 0 \pmod{12}$$

$12=4\times 3$ なので，$x-2$ が 3 の倍数であれば良く $x-2=3k$
よって，$x \equiv 2 \pmod{3}$．これが答え．

273 $3x+7y=41$ の整数解を求める問題は $\boxed{257}$ や $\boxed{258}$ でやっていますが，今回は合同式を用いて解くよう指示されています．
まず $3x+7y=41$ の両辺を (mod 3) で考えると，$y \equiv 2 \pmod{3}$ が得られます．
よって，$y=3k+2$ とおけるので，元の式に代入して
$3x+7(3k+2)=41$ より，$3x+21k=27$.
つまり，$x=-7k+9$
これで終わり．ああカンタン．

274 (1) だけやってみます．
$17x+43y=341$ を (mod 17) で考えると，$9y \equiv 1 \pmod{17}$ が得られます．両辺を 2 倍して $18y \equiv 2 \pmod{17}$.
よって，$y \equiv 2 \pmod{17}$.
つまり $y=17k+2$ とおけるので元の式に代入して，
$17x+43(17k+2)=341$ より，
$17x+731k=255$.
$x+43k=15$．$x=-43k+15$
これで終わり．ああカンタン．