第３章　整数の性質

第３節　整数の性質の活用

補充　素数の問題

「素数」とは，2 以上の自然数で，1 とそれ自身以外に正の約数をもたない数のことですが，もっとカンタンに言ってしまえば，

これ以上に素因数分解できない数

というのがストレートです．ですから，次の重要な関係が成り立ちます．

以下，p を素数とします．

▷Point◁（素数の性質）

ab が p の倍数
$\Longrightarrow$ a または b が p の倍数

特に，

▷Point◁（素数の性質）

$ab=p$
$\Longrightarrow$，$(a,\ b)=(1,\ p)$ または $(a,\ b)=(p,\ 1)$

素数の問題を解くには，たいていこの関係を使います．ていうか，これしか使わない．

にも関わらず，「素数わからん」「素数の問題ムズイ」という人がいます．確かに，素数についてはまだまだ未知の謎の部分が多く，素数についての本格的な問題は，世界中の数学者の頭脳を結集しても解けない有様です．ですから，高校生のレベルで扱える素数の問題は，かなりカンタンに処理できるように作られています．

例えば，「素数を求めよ」なんて言われたら，世界の数学者たちは怖気づくかもしれませんが，高校生が大学入試レベルで求めることのできる素数は，たいてい，すぐ近くに転がっています．

つまり，

▷Point◁（素数問題の考え方）

素数の問題では，具体的に実験すれば，たいてい予想がつく．その予想を，正しく解釈して証明に持ち込むことがポイント．

であるといえるでしょう．

恐れる必要ありません．

292 n と $n+1$ が共に素数になるような組み合わせを「双子素数」といいます．「双子素数」は無限にあるだろうと考えられていますが，未だ未解決です．

この問題は，そんな無限個ある組み合わせの中から，「2 桁で小さいものから 3 番目を言え」ということですから，具体的に書き出したほうが早いでしょう。

n	$n+2$
3	5
11	13
17	19
29	31
41	43
59	61
71	73

よって，条件にあるのは $n=29$ です．おしまい．「こんな解き方でエエのか？」と思うかも知れませんが，今回の場合はこれで十分です．

参考　少しだけ数学的な話をしておきます．

おそらく皆さんは，n に素数を順番に入れていって，$n+2$ も素数になる組み合わせを探したと思います．

僕は少し違う方法で見つけました．実は，$(3,\ 5)$ 以外の「双子素数」の真ん中の数字は必ず 6 の倍数になります．なので，6 の倍数　±1 で「双子素数」の候補を絞り込むことができます．

なぜ，「双子素数」の真ん中の数字が 6 の倍数になるのか，そうですねえ，3 年生の演習の時間にでも証明をしたいと思います．どうしても気になる人は考えて，僕のところに証明を持ってきてください．

補充問題

$n>3$ とする．n と $n+2$ が共に素数のとき，$n+1$ は 6 の倍数であることを示せ．

293 $2310=2\times3\times5\times7\times11$，つまり，2310 は素数を最初から順番に 5 個かけた数字です．

ということは $\dfrac{2\times3\times5\times7\times11}{n}$ が素数になるためには，n が分子の 5 個の数字のうち 4 個を約分してしまえば良いのです．

$\boxed{294}$ $n^2-14n+40=(n-4)(n-10)$ なので，これが素数 p になるには，因数の $n-4$ と $n-10$ のどちらか一方が 1 または -1 にならねばなりません．ただそれだけのことですが，まともにやれば様々な場合を調べ上げねばならないのでメンドウです．上の例題 43 を参照してください．

個人的には，「$n^2-14n+40=(n-4)(n-10)>0$ である必要がある」という条件から 2 次不等式を解く要領で，$n<4,\ 10<n$ とし，この範囲内で因数の $n-4$ と $n-10$ のどちらか一方が 1 または -1 になる場合を検証します．$n=3$ と $n=11$ しかないですね．

$\boxed{295}$ なかなか面白いパズル的な問題．こういう問題は楽しみながら解いてほしいですね．

4 つの素数 a，b，c，d の中から 2 つを選んで足すと

$a+b$，$a+c$，$a+d$，$b+c$，$b+d$，$c+d$

の 6 通りできます．これらが

$$40,\quad 60,\quad 66,\quad 88,\quad 94,\quad 114$$

のいずれかに等しいわけです．どれがどれに対応するのか？

ポイント（ていうか唯一の手がかり）は，大小関係 $a<b<c<d$ です．これだけを使います．

まず，明らかに，$a+b$ が最小で，$c+d$ が最大になります．

よって，

$$a+b=40,\qquad c+d=114$$

次に，残り 4 つ

$$a+c,\qquad a+d,\qquad b+c,\qquad b+d$$

の中で，最大と最小はどれになるのか考えてください．例えば，$a<b<c<d$ より

$$a+c<a+d,\qquad b+c<b+d$$

です．この時点で，最大値は $a+d$ と $b+d$ のどっちか，最小値は $a+c$ と $b+c$ のどっちかになります．どっちの方がより大きく，より小さいのか？それは引いてみれば分かるでしょう．

✎注　この問題は (1) が (2) のヒントになっていますが，理想的にはいきなり (2) が出題されても解けてほしい．おそらく入試ではノーヒントで (2) が出題されるでしょう．そういえば昔の京大で似たような問題が出題されてました．2002 年の前期文系の問題を探して見てください．

$\boxed{296}$ (1) は整数問題とは関係ない因数分解の問題ですが，意外と手こずるかもしれません．数学 I でもありましたね，こういうの．

$$n^4+2=(n^2+2)^2-4n^2$$

です．あとは勝手に考えてください．

(2) は素数にならないことを示す問題．難しそうですが，整数問題に限らず，証明問題全般に共通する考え方として，「背理法を用いる」という考え方はいつでも出せるようにしておこう．

つまり，この問題も「素数になったと仮定すると矛盾する」ことを示せばよいのです．

(1) で因数分解できているわけだから，これが素数になるためには，その因数のどちらかが必ず 1 にならねばなりません（$\boxed{294}$ 参照）．はたして，そんなことが起こりうるのかな？

✎注　この問題も (1) が (2) のヒントになっていますが，理想的にはいきなり (2) が出題されても解けてほしい．おそらく入試ではノーヒントで (2) が出題されるでしょう．

$\boxed{297}$ 有名問題．昔の早稲田大学の入試問題だと思います．このタイプの問題は具体的に書き出して，規則性を見つけます．

n	$n+2$	$n+4$
3	5	7
5	7	9
7	9	11
11	13	15
13	15	17
17	19	21
19	21	23

こうやって並べてみると，$n=3$ の時しか無理っぽいですね．では，$n=3$ 以外の場所はなぜダメなのか．それは，素数でない，つまり，何らかの倍数になっているからです．素数でないところをチェックすると・・・何らかの共通する倍数になっていませんか？つまり，$n=3$ 以外のところは $n+2$ と $n+4$ のどちらか一方がその倍数になっていることを示せばよいのです．

なお，犬プリ「整数問題の原則編」でも詳しく紹介してあるのでそちらも参照してください．

参考　2006 年の京都大学で「n が 2 以上の自然数の時，n と n^2+2 が共に素数になる n は？」という問題が出題されています．