第 1 章　平面上のベクトル

第 1 節　平面上のベクトルとその演算

1　平面上のベクトル

2　ベクトルの演算

大きさと向きをもつ量のことをベクトルといいます (しかし，この表現は高校においての定義であり，大学で学ぶ本来のベクトルの定義は，実は違います).

物理屋さんと違って，我々数学屋さんは，ベクトルを単なる記号の演算と考えることが多く，次のことが基本となります.

ベクトルの記号演算

ベクトルの加法 (しりとり公式)

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

零ベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{AA}}=\overrightarrow{0}$$

逆ベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

ベクトルの分解公式 (始点のすり替え公式)

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

☆この章のポイント☆

① まずは, 上の ベクトルの記号演算 を理解する.

② わけのわからんベクトルが出たら，自分にとって都合のよい始点にすりかえる.

③ ベクトルの平行条件

$$\overrightarrow{a} \text{ と } \overrightarrow{b} \text{ が平行} \Longleftrightarrow \overrightarrow{a}=k\overrightarrow{b} \text{ と表せる.}$$

を理解する.

1 ベクトルは**大きさ**と**向き**で決まります．大きさと向きがともに等しいベクトルが同じベクトルです．平行移動しても大きさと向きは変化しないので，ベクトルは平行移動しても構わないのです．つまり，平行移動してピッタリ重なるベクトルが等しいベクトルです.

2 等式の証明問題なので等式証明のルールに従おう．この問題は，(左辺) − (右辺) = $\overrightarrow{0}$ を示すのが良いでしょう．$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ などの変形をたびたび用いて計算を進めよう．あんまり深く考えずに，**単なる記号の演算**と思って計算することです．それが面倒なら，**わけのわからんベクトルが出たら，自分にとって都合のよい始点にすりかえる**という基本精神に従って，すべてのベクトルの始点をそろえて (例えば A とか O とか) 両辺を別々に計算して一致することを示しても構いません．この方が案外簡単かもね.

3 楽しく作図しましょう．そう，楽しく．特に，ベクトルの差に注意しよう.

4 **ベクトルの計算 (和，差，実数倍) は，通常の文字式の計算と同じ**です．しかし，ベクトルである以上「矢印」は忘れてはなりません.

5 1 次方程式を解く要領で，$\overrightarrow{x}$ を求めればよいのです．これも「矢印」を忘れないように.

6 単位ベクトルとは，**大きさが 1 のベクトル**のことです．例えば，$\overrightarrow{a}$ の大きさ (長さ) が 5 のとき，$\overrightarrow{a}$ を 5 で割って，$\dfrac{1}{5}\overrightarrow{a}$ とすれば単位ベクトルになります．つまり，任意のベクトルは大きさ (長さ) で割ると単位ベクトルに変形できるのです．つまり，

$$\frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|} \text{ は単位ベクトル}$$

です．なお, (1) と (2) の違いも意識しよう.

7 **わけのわからんベクトルが出たら，自分にとって都合のよい始点にすりかえる**という方法は，ベクトルの問題を解く上で，もっとも基本的かつ重要な方法です．この問題の場合は，問題文の条件に合わせて始点を A にそろえるのがよいでしょう.

8 平行四辺形の性質から $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ や $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ はすぐにわかります．その上で前問と同様に，**わけの**

わからんベクトルが出たら，自分にとって都合のよい始点にすりかえるという方法をとろう．やはり，問題文の条件に合わせて始点を A にそろえるのがよいでしょう．

$\boxed{9}$ **2 つのベクトルが平行である**とはどういう状態で，式としてどう表現されることだったかを思い出そう．まずは, (1) では $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を, (2) では $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ をそれぞれ $\vec{a}$， $\vec{b}$ で表そう．(2) も同様.

$\boxed{10}$ 連立 1 次方程式を解く要領で $\vec{x}$ と $\vec{y}$ を求めるだけ．やはり「矢印」を忘れないように.

$\boxed{11}$ 例題 1 と全く同様です．まずは例題 1 を熟読しよう．そうすれば，この問題はできるはず．要するに，まずは $\vec{u}$ と $\vec{v}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表すのです．前問と同様，連立 1 次方程式を解く要領が要求されますね.

$\boxed{12}$ まずは「四角形 ABCD が平行四辺形である」ということをベクトルを用いて言い換えよう．**1 組の辺が長さが等しく平行であること**が平行四辺形の条件です．このことはベクトルを利用すれば簡単に表現できます.

あとは単なる式変形なんですが，この問題の難しいところは変形の方向性．示すべき式をにらみながら，どのように変形していけばよいのか (どういうベクトルを作り出せばよいのか) を予測しつつ，カンを頼りに計算を進めていく必要があるでしょう．ある意味，記号のパズル的な問題ですね.

なお，原則的に「$\Longleftrightarrow$」の証明は,「$\Longrightarrow$」と「$\Longleftarrow$」の双方向の証明をせねばならないのですが，この問題はあまり気にせず，そのまま進めても構わないでしょう.