

第2章 空間のベクトル

4 ベクトルの内積

☆この章のポイント☆

空間ベクトルの内積も平面ベクトルの場合と同じです。よって、平面ベクトルの場合と同じポイントが重要です。

- ① ベクトルの内積の定義を覚えること。特に、その定義が、内積の値、大きさ、角度の三位一体である点を意識すること。特に、成分表示されたベクトルの内積の値は簡単に求められる。
- ② ベクトルの絶対値は2乗しないと先に進まない。
- ③ 同じベクトルの内積は絶対値の2乗になる。
- ④ 「垂直」とくれば「内積 = 0」。

103 空間ベクトルの内積も平面ベクトルの場合と同じです。なす角も始点をそろえて測るという点で同じですが、空間図形なので平面の場合よりも少しイマジネーションを働かさないといけないかもしれません。『平面ベクトル』25も見ておこう。

104 平面の場合、2つのベクトルのなす角は(乱暴な言い方をすれば)グラフ用紙に正確に図示して分度器で測れば、ベクトルの知識なんてなくても分かるのです。しかし、空間図形の場合はそうはいきません。そもそも正確な図示はできないので、分度器どころの話ではないからです。正確に図示するにはパソコンで3D画像を作るしかありません。しかし、ベクトルの内積を利用すれば、なす角が分かるのです。これは凄いことです。ベクトルは空間図形の性質を簡単に解明できる魔法の道具なのです。『平面ベクトル』27も見ておこう。

105 三角形の内角も2つのベクトルのなす角なので、内積を利用し求めます。授業でも取り上げました。知りたい角の頂点を始点にとったベクトルを考え、なす角を計算します。なす角の求め方は前問と同じ。なお、

『平面ベクトル』29も見ておこう。

106 このような問題は空間ベクトル特有の問題です。平面上では1次独立な2つのベクトルに共に垂直なベクトルなんて存在しませんが、空間では存在するのです。求め方は、(1)は垂直とくれば内積が0という常識に従い、

$$(2) \text{は } \vec{0} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \text{とでもおいて、同じく垂直条件と大きさの条件を式で表すだけ。}$$

(1)は文字が2つだから式も2つ、(2)は文字が3つだから式も3つであることを意識しよう。

107 前問と同じ。単位ベクトルとは大きさが1のベクトルことです。文字の数と式の数を一致させること。『平面ベクトル』28も見ておこう。

なお「外積」という裏ワザを用いれば、垂直なベクトル(の一つ)を簡単に求めることができます。

108 問題を慎重に読もう。 $\vec{a} + k\vec{b}$ と $\vec{b} + k\vec{a}$ がともに \vec{a} に垂直なのであって、 $\vec{a} + k\vec{b}$ と $\vec{b} + k\vec{a}$ が垂直なのではありません。そこを勘違いしなければ、垂直とくれば内積が0という常識があれば問題なし。まずは $\vec{a} + k\vec{b}$ と $\vec{b} + k\vec{a}$ を成分表示しよう。成分表示せずに、そのまま内積の計算しても構いませんが、同じベクトルの内積は絶対値の2乗に注意すること。

109 『平面ベクトル』例題4および44を参照すること。ベクトルを利用した三角形の面積の公式は平面も空間も全く同じ公式です。これがベクトルのすごいところ。この公式はメチャクチャ重要なので必ず覚えておくこと。

☆三角形の面積(重要)☆

$\triangle ABC$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}$$

とベクトルを用いて表される。

- 110 図を書いているいろいろ想像力を働かせてもよいですが、そんなことをするより、例えば x 軸を表す方向ベクトルを $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とでもおいて、 \vec{a} とのなす角 (つまり α) を機械的に計算するほうが手っ取り早いでしょう。正直どーでもよい問題ですね。

- 111 これも正直どーでもよい問題ですが、次のように考えれば少しはやる気も起こるでしょう

か。「鉛筆を 2 本用意して 1 本を机の角に立てろ。それが z 軸で、その鉛筆の根元が原点だ。それから、もう 1 本の鉛筆を、机のそれぞれ縁 (つまり x 軸と y 軸) から 45° と 60° になるように原点にくっつける。そしてイメージせよ」

- 112 何の数学的面白さも深さも無い問題。とにかく問題文の条件をすべて式に表して解くだけ。ベクトルの絶対値は 2 乗しないと先に進まない、同じベクトルの内積は絶対値の 2 乗になるという大原則に従おう。正直どーでもよい問題。