第 2 章　空間のベクトル

7　ベクトルと図形

空間ベクトルの最重要部分です．

> ☆この章のポイント☆
> **空間図形といえども，特定の面や断面だけに注目して考えれば単なる平面図形**であるので，空間ベクトルも平面ベクトルも基本的に同じです．よって，平面ベクトルの場合と同じポイントが重要です．
> ① まずは自分でベクトルを設定すること (どこを始点におくべきか？)．
> ② 何を示せばよいのか目標をはっきりさせること．
> ③3 点が同一直線上にあるための条件．
> ④4 点が同一平面上にあるための条件．

118　「3 点 A，B，C が同一直線上にある」とは，**2 点 A，B を通る直線上に残りの 1 点 C ものっかっている**と考えるのが基本です．そのためには次の重要事実を頭に入れておかねばなりません．

> ☆超重要☆
> 点 P が直線 AB 上に存在するとき，
> $$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$
> となる実数 t が存在する．
> この式を O を始点に変形すると，
> $$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad s+t=1$$
> が成立する．

3 点 A，B，P が同一直線上にあるとは，つまり，**$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を適当に伸ばせば $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ になる**ということを意味しています．最初の関係式はまさにそのことを表現しています．**このような t が存在すれば，3 点 A，B，P が同一直線上にあるのです** (なお始点は B でも構いません．つまり，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=t\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ としても全く問題ありません)．後半の式は，前式を変形しただけで，**この関係式を満たすような s，t が存在すれば，3 点 A，B，P が同一直線上にあるのです．**

しかし，本問の場合は，3 点が同一直線上にあるようにせよこという問題なので (つまり「3 点が同一直線上にあることを証明せよ」という問題ではない)，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

となるような t が始めから存在することを前提にして考える，つまり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad s+t=1$$

となるような s，t が始めから存在することを前提にして考えればよいのです．

どちらの式でも同じですが，最初の方が文字が少ないので計算は少しだけ楽です．

119　「4 点が同一平面上にある」とは，**3 点でできる平面上に残りの 1 点ものっかっている**と考えるのが基本です．もしも『平面の方程式』をすでに知っているなら，例えば (1) の場合，3 点 O，A，B を通る平面の方程式を求めて，その式に点 C の座標を代入すれば x を求めことができます．

『平面の方程式』を知らないなら次の重要事実を頭に入れておかねばなりません．

> ☆超重要☆
> 点 P が平面 ABC 上に存在するとき，
> $$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=s\overrightarrow{\mathrm{CA}}+t\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$
> となる実数 s，t が存在する．
> この式を O を始点に変形すると，
> $$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}},\quad s+t+u=1$$
> が成立する

4 点 A，B，C, P が同一平面上にあるとは，**$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ とを適当に伸ばして加えれば $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ を対角線にできる**ということを意味しています．最初の関係式はそのことを表現しています．**このような s, t が存在すれば，4 点 A，**

B，C，P が同一平面上にあるのです (なお始点は A でも B でも構いません．つまり，$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ とか $\overrightarrow{BP}=s\overrightarrow{BA}+t\overrightarrow{BC}$ としても全く問題ありません)．後半の式は，前式を変形しただけで，**この式を満たすような s，t，u が存在すれば，4 点 A，B，C，P が同一平面上にあるのです．**
しかし，本問の場合は，4 点が同一平面上にあるようにせよという問題なので (つまり「4 点が同一直線上にあることを証明せよ」という問題ではない)，

$$\overrightarrow{CD}=s\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{CB}$$

となるような s，t が始めから存在することを前提にして考える，つまり，

$$\overrightarrow{OD}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC},\quad s+t+u=1$$

となるような s，t，u が始めから存在することを前提にして考えればよいのです．
どちらの式でも同じですが，最初の方が文字が少ないので計算は少しだけ楽です．
この問題は，犬プリでも紹介してあります．
なお，$\boxed{118}$ と $\boxed{119}$ は双子のような問題です．合わせて，まとめて，理解してください．
$\boxed{121}$ は A と B の座標が決まってて，C に文字が入っている，$\boxed{122}$ は A と B と C の座標が決まってて，D に文字が入っている…似ているではないですか！つまり，これらの問題は，

2 点を通る直線は必ず存在するが，3 点では？

3 点を通る平面は必ず存在するが，4 点では？

ということを聞いているのです．

$\boxed{120}$

ここから $\boxed{125}$ までの 6 問が空間ベクトルの最重要，最難関問題です．この 6 問がマスターできれば，空間ベクトルについては入試レベルまでほぼ到達できるので，がんばって取り組んでほしいです．1 回解くだけでは不十分です．何度も解いて解法を定着させよう．

まずは，平行六面体 OADB-CEFG の形を把握しよう．自力でイメージできなければなりません．あとは，特定の面や断面に注目して考えれば，P，Q，R，S，T，H の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表すことができます．当然，始点はすべて O にそろえましょう．あとは，平行条件，同一直線上にあるための条件を満たしていることを確認するだけ．
(2) は犬プリでも紹介してあります．

$\boxed{121}$ 基本方針は前問に同じ．始点はすべて O にそろえて，ある面や断面だけに注目します．R，S，L，M の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表すことができれば，あとは，平行条件を満たしていることを確認するだけの問題です．しかし，$\overrightarrow{OR}$ と $\overrightarrow{OS}$ を求めるのが意外と困るかもしれません．このタイプの問題は平面ベクトルでやったはず (『平面ベクトル』$\boxed{62}$ を思い出そう)．重要な問題でしたね．
この問題も犬プリで紹介してあります．

$\boxed{122}$ 重要な問題です．まずは上の例題 11 を熟読してください．考え方としては，まず $\overrightarrow{OR}$ は適当な面や断面に注目すれば求まります．次に，直線 OR の延長上に点 P が存在することから，$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OR}$ とおけます．k の値がわかれば，$\overrightarrow{OP}$ が決定します．ここで **k が $\overrightarrow{OR}$ の伸縮率であると解釈します．** どの程度まで伸ばせばよいのかというと，△ABC にコツンと当たるまで伸ばすのです．つまり，点 P が △ABC 上に存在する，つまり

$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC},\quad s+t+u=1$$

が成立するするように伸ばすのです．これらのことから，k の値を決定することができるでしょう．
犬プリでも紹介してあります．

123 これも重要な問題です．授業でも取り上げた問題なのでノートを見てください．**まずは，問題文にベクトルの表記が全くないですがベクトルで解こうと思わなければなりません**．そのために，自分でベクトルを設定する必要があります。空間図形なので，基本的に 1 次独立なベクトルを 3 つ設定すればOK．常識的に見て $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ でしょう．ここからの考え方の流れは前問に同じ．

つまり，まず $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ は簡単に求まります．次に，直線 OG 上に点 H が存在することから，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ とおけます．k の値を求めれば，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ が決定します．ここでも k が $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ **の伸縮率であると解釈します**．どの程度縮めればよいのかというと，△MBC にコツンと当たるまで縮めるのです．つまり，点 H が △MBC 上に存在する，つまり

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\overrightarrow{\mathrm{OM}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}},\quad s+t+u=1$$

が成立します． これらのことから，k の値を決定することができるでしょう (**最初の項が，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ ではなく $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ になっている点に要注意！**)．詳しくは授業のノートを見てください．

犬プリでも紹介してあります．

124 問題の状況から見て，個人的には C を始点にしたベクトルを設定して解答したいところです．その方がこれまでの問題と全く同様に考えられるからです．なのに O を始点にするよう指示されているのは，なぜなのでしょう？ (単なる嫌がらせ？)．まあ，指定されているのだから仕方ないです．指示通りやってみましょう．

問題文にはすでにベクトルが設定されています．じゃあ，自分で設定する必要はないか…と思うのですが，ん？空間図形では 3 つの 1 次独立なベクトルを設定するのが普通なのに 2 つしか設定されてません！なぜでしょうか？

それは，**求める点 H が △OAB 上の点なので，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ だけで表現されるから**です．だから最初から，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ しか設定してないのです．

しかしながら，途中計算の過程で，どうしてももう一つベクトルが必要になるので，やっぱり $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ だけ自分で**追加設定せねばならなりません** (最終的には消えてなくなるけど)．

まず，H が △OAB 上の点なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

とおけます (これは OK でしょう)．

次に，これまでと同様，$\overrightarrow{\mathrm{CG}}$ を伸ばしたものが $\overrightarrow{\mathrm{CG}}$ だから，

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=k\overrightarrow{\mathrm{CG}}$$

とおけます．k の値を求めればよいのです．

今回の考え方のポイントは，**この式を始点が O になるように変形すること**です．なぜなら，この問題の設定が O を始点にしているからです (始点のすり換え)．つまり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=k(\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})$$

あとは，この式に，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を代入すると，おそらく，両辺が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の式になると思うので，両辺のそれぞれの係数を比較すれば，s，t そして k の値がわかります．なお，係数比較する際には，

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は 1 次独立だから

という「おまじない」を忘れないように．

えっ？　空間ベクトルの 1 次独立は習ってないって？　まあ・・・エエでしょう．気が向いたら教えます．

この問題は，これまでの知識をうまく使いこなす力が必要ですね．自力で解けるように，「言われてみればわかるけど・・・」ということにならないように何回も復習してください．

125 空間ベクトル最後の難問．だから説明も長いです．じっくり読んでください．この問題ができれば空間ベクトルは君のモノです．まずはベクトルを自分で設定するのですが，問題文の雰囲気から考えて，四面体の場合は頂点

A を始点に取るのが普通でしょう．つまり，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とおきます．

(1) は 4 点が同一平面上にあることの証明なのですが，なかなか考えにくい問題．

4 点が同一平面上にあることの証明は，**3 点でできる平面上に残りの 1 点ものっかっている**と考えるのが基本で，そのためには，先ほどより何度も出ている重要事項，

> ☆超重要☆
> 点 P が平面 ABC 上に存在するとき，
> $$\overrightarrow{CP}=s\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{CB}$$
> となる実数 s，t が存在する．
> この式を O を始点に変形すると，
> $$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC},\quad s+t+u=1$$
> が成立する

が重要です．

ポイントは，**上の式を満たすような s，t，u が存在しさえすればよい**ということ．つまり，条件を満たす s，t，u の存在が確認できれば，平面上に点が存在することの証明が完了するのです．

したがって，今回の場合，4 点 K，L，M，N が同一平面上にあることを示すのだから，例えば「点 M が平面 LNK 上に存在すること」を示せばよいと考えて，

$$\overrightarrow{KM}=s\overrightarrow{KL}+t\overrightarrow{KN}\cdots①$$

となる実数 s，t が存在すること．あるいは

$$\overrightarrow{AM}=s\overrightarrow{AL}+t\overrightarrow{AN}+u\overrightarrow{AK},\quad s+t+u=1\cdots②$$

となる実数 s，t，u が存在することを示せばよいことになります (なお，後半の式はいま始点を A にとっているので A を始点に考えることにしました．なお，① の式を A を始点に書き直すと ② の式になります．つまり **① の式と ② の式は全く同じ式です**)．

何度も言いますが，**上の式を満たすような s，t，u が存在しさえすればよい**ということです．s，t，u の存在が確認できれば，単純に言えば**このような形に書ける**ということが確認できれば，平面上に点が存在することの証明が完了するのです．

ちょっと余談ですが，実は「存在すること」の証明は数学の中でも最も難しい問題です (たとえば，「最大値を求めよ」という問題と「最大値が存在することを証明せよ」という問題を比べたら、どちらのほうが難しく感じるでしょうか)．最初から存在することが分かっているものをただ単に見つけることと，そもそもそれが存在すること自体を証明することとは全く別です．では，どうすればよいのか．**一番手っ取り早いのは，実際に目の前に見せること**です．例えば「この袋の中に赤玉が存在することを証明せよ」と言われたら，いろいろ証明方法を考えるより，とにかく赤玉を袋の中から出して目の前に見せれば証明できたことになるでしょう．まあ，こんな感じです．だから「s，t，u の存在を証明せよ」と言われたら，**とにかく悩むよりも，そのような形にかけることを実際に作って見せればよいのです**．

話は戻しますが，まあ，① と ②，どちらの方針でいっても大丈夫なので，まずは，$\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AL}$，$\overrightarrow{AN}$，$\overrightarrow{AK}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ で表すことから始めましょうか．その形を見て (睨んで)，

$$\overrightarrow{AM}=s\overrightarrow{AL}+t\overrightarrow{AN}+u\overrightarrow{AK},\quad s+t+u=1$$

という形になってないか，または，$\overrightarrow{KM}$，$\overrightarrow{KL}$，$\overrightarrow{KN}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ で表してみて，

$$\overrightarrow{KM}=s\overrightarrow{KL}+t\overrightarrow{KN}$$

という形になってないかを見抜く．見抜く．見抜く．つまり，

s, t, u を自分で見つける！見つけたら終わり！

(2) は楽勝．単なる式変形．

(3) は (1) と基本方針は同じ．点 R が平面 LNK 上に存在することを示せばよいのです．(1) ができれば全く同様にできると思い

ます．くどいようですが，**「そのような形の式に書けること」が「存在すること」の証明になる**ということがポイントです．結局のところ，

結論を見越した推測

ということでしょうか．

$\boxed{126}$ いわゆる「三垂線の定理」です．数学 A の空間図形のところで登場しているので確認してください．この問題はこの「三垂線の定理」の証明とほとんど同じ流れでできます．
ところで，この「三垂線の定理」ですが，当たり前といえば当たり前だし，そうじゃないといえばそうじゃないし…なんだかよくわからん定理ですが，まあ，そこそこ大切な定理ではあります (この定理はユークリッドの幾何学原論第 11 巻の第 12 定理として述べられています)．
空間図形の問題が頻出の大学を受ける場合は常識としておきたいところ．たとえば東京大学，京都大学とか．フツーに出るでしょうね．

$\boxed{127}$ ポイントは，正四面体であること，つまり**各面が合同な正三角形**であるということです．この条件は大きい．一辺の長さを l とでもおいて，ベクトルのなす角にも注目して，証明 (計算) を進めていこう．四面体の頂点の一つ (たとえば A) を始点に定めて計算すればよいでしょう．もうここまでくれば，ベクトルの計算もオテノモノでしょ．
(2) は犬プリでも紹介してあります．

$\boxed{128}$ 空間における直線のベクトル方程式は，平面における直線のベクトル方程式と同じ方法で構成されます．だから，**平面における直線のベクトル方程式をまずは理解せねばなりません**．
つまり，直線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおきます．媒介変数 t を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\text{通る点の位置ベクトル})+t(\text{方向ベクトル})$$

とします．これが空間のベクトル方程式です．平面の場合と全く同じですね．この式の意味は授業中に説明しています (**t は目盛りのようなモノ**って言いました)．
なお，直線のベクトル方程式については，犬プリでかなり詳しく説明してありますので必ず読んでおいてください．
この問題における方向ベクトルとは，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ または $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$．通る点の位置ベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ または $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$．よって，**人によっては式の形が異なる可能性がありますが**，全く問題ありません．
まずは，2 点 A， B を通る直線のベクトル方程式を媒介変数 t を用いて表現します．媒介変数 t とは目盛りのようなモノで，t にいろいろな数値を代入することで，その直線上のすべての点が漏れなく表現されるのです．
H は直線 AB 上の点だから，H の座標を媒介変数 t を用いて表現します．あとは，PH と直線 AB が垂直なのだから…『平面ベクトル』$\boxed{76}$(2) を必ず参照すること．全く同じ解法です．

$\boxed{129}$ 授業で取り上げた問題．例題 13 とほとんど同じです．原点 O が点 P に変ってるだけ．まずは授業のノートや例題 12 の解説を熟読すること．
$\boxed{\text{ポイント ①}}$
点 H が平面 ABC 上に存在していること
$\boxed{\text{ポイント ②}}$
PH は平面 ABC 上の任意の直線と垂直であること
がポイントです．この 2 つのポイントをベクトルを用いて表現するだけです．
$\boxed{\text{ポイント ①}}$ について．
まずは，点 H の位置ベクトルをどこを始点に考えるのかを決めることからスタートします．点 P を始点に考えて，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ を

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=s\overrightarrow{\mathrm{PA}}+t\overrightarrow{\mathrm{PB}}+u\overrightarrow{\mathrm{PC}},\quad s+t+u=1$$

としても良いし，点 C を始点に考えて，

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=s\overrightarrow{\mathrm{CA}}+t\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

としても良いです．形のスッキリさを取るなら一番前半の式，計算の楽さを取るなら後半の式でしょうか (登場する文字の数の違いです)．まあ，変形すれば同じ式になるので，どっちか好きな方を選んでください (当然ながら，始点を点 A や点 B にとって，

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

とか

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=s\overrightarrow{\mathrm{BA}}+t\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

でも全く問題ありません)．

$\boxed{\text{ポイント②}}$ について．

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=0$$

などの式を利用します．

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=s\overrightarrow{\mathrm{PA}}+t\overrightarrow{\mathrm{PB}}+u\overrightarrow{\mathrm{PC}},\quad s+t+u=1$$

で始めた人は，右辺を成分表示すれば即，内積計算に突入できます．つまり，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PH}}&=s\overrightarrow{\mathrm{PA}}+t\overrightarrow{\mathrm{PB}}+u\overrightarrow{\mathrm{PC}}\\&=s\begin{pmatrix}0\\2\\-5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\0\\-5\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-2t-3u\\2s+u\\-5s-5t-u\end{pmatrix}\end{aligned}$$

として，

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=0$$

などより，s，t，u の連立方程式を作って解けばよいのです ($s+t+u=1$ という関係式があるので，**これらの中から式を 2 個使えば良いです．文字 3 個なので式の数もトータル 3 個で良いから**)．また，

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=s\overrightarrow{\mathrm{CA}}+t\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

で始めた人は，

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}-\overrightarrow{\mathrm{PC}}=s\overrightarrow{\mathrm{CA}}+t\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=\overrightarrow{\mathrm{PC}}+s\overrightarrow{\mathrm{CA}}+t\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

と変形し右辺を成分表示してから，内積計算に入ります．つまり，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PH}}&=\overrightarrow{\mathrm{PC}}+s\overrightarrow{\mathrm{CA}}+t\overrightarrow{\mathrm{CB}}\\&=\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-3+3s+t\\1+s-t\\-1-4s-4t\end{pmatrix}\end{aligned}$$

この場合は，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ がすでに分かっているので，

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=0$$

より，s，t の連立方程式を作って解けばよいのです．
このひと手間が面倒な気もしますね．
まあ，いずれにしても，連立方程式を作って解くだけです．
なお最後に，そもそも求めるのは点 P の座標であったことをお忘れなく．$\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ を求めて終わる人が結構多いんですね．**$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を求めて終わってください．これが点 H の座標になります．**

$\boxed{130}$ 正四面体や一つの頂点の周りの 3 つの角がいずれも直角である四面体の場合などの特別な場合を除いて，一般の四面体の体積をベクトルを利用して求めることは，これまで学習してきたことを総動員するので非常に有益な問題です．
ご存知のとおり四面体の体積 V は

$$V=\text{底面積}\times\text{高さ}\times\frac{1}{3}$$

で求められます．どの面を底面に見てもよいですが，問題で「△ABC の面積 S を求めよ」とあるので，これを底面に考えよということなのでしょう．面積は $\boxed{109}$ の方法で求められます (この公式は重要)．高さは D から平面 ABC におろした垂線の長さだから $\boxed{129}$ の方法で求められます．

さて，ベクトルを四面体のどの頂点を始点とするのか考えねばなりません．$\boxed{129}$と同様，点 D を始点とするベクトルを考えると，s，t，u の 3 文字の連立方程式を解くことになり，始点を点 A などにすれば，s，t の 2 文字の連立方程式を解くことになります．別に，どこを始点にとってもできるので問題はありませんが，実は，**一番効率のよい設定の仕方は最初で決まっている**のです．
それは，△ABC **の面積をベクトルで求めた際に，どのベクトルで計算したのか**，ということ．もし，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$$

を利用したのなら，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ をすでに求めているのだから，これを利用しない手はありません．つまり，始点は A で考えるべきです．これがベストです．
手間のかかる問題ですが単純です．
なお，四面体の体積については犬プリで詳しく解説してあります．