第 2 章　空間のベクトル

8　座標空間における図形

$\boxed{131}$ 内分点，外分点の求め方は，これまでに学習した，数直線の場合，平面座標の場合に全く同じです．特に外分点の公式の符号を間違えないようにしよう．しかし，ベクトルの成分表示として考えれば，4STEP の 141 ページ上のベクトルの内分点・外分点の公式で終わりですね．数学 II の $\boxed{154}$ も見といてください．

$\boxed{132}$ これも，座標と考えなければ（つまりベクトルの成分表示と考えれば），「何を今さら」という問題でしょう．軽くこなしてほしいところ．

$\boxed{133}$ まずは求める平面をイメージしよう．座標軸に垂直（または座標平面に平行）な平面上の点は x 座標，y 座標，z 座標のいずれかの値が一定なのです．

$\boxed{134}$ ある点から等距離にある点の集合は，平面上では円であり，空間では球面になります．つまり球面の方程式は円の方程式と同様に**中心の座標と半径で決定します**．基本的な計算手法は円の場合に全く同じです．よって，この問題は特にコメントなし．全然面白くないね．数学 II の $\boxed{185}$ も見といてください．

$\boxed{135}$ 図形と図形の交点の様子は，それらの図形を表す方程式を連立させたときの解の様子でわかります．
つまり，球面と各座標平面との交わりの図形の方程式を求めるには，球面の式と各座標平面の式とを連立させれば良いのです．座標平面を式で表すことはできるでしょうね．たとえば xy 平面上の点はすべて z 座標が 0 であるので xy 平面を式で表すと $z=0$ となります．これと球面の式を連立する，つまり球面の式に $z=0$ を代入するだけです．

$\boxed{136}$ 対称点の求め方も基本的に平面の場合に同じです．つまり**点 A に関して点 P と点 Q が対称であるとは，線分 PQ の中点が点 A であることを意味しています**．数学 II の $\boxed{156}$ も見といてください．

$\boxed{137}$ 目の前の机を xy 平面だと思って空中に浮かぶの 2 点 A，B をイメージしよう．点 A から xy 平面に向けて放たれた光線が xy 平面にあたって跳ね返り，点 B に到達するイメージ．このとき xy 平面に当たる場所の座標を求めよ，という問題です．**光の進むルートは最短ルートなのです**．これは物理学の常識（?）かな．このような最短ルートの問題も平面の場合に経験済みでしょう．

$\boxed{138}$ 円の中心と半径を求める要領で．2 次関数の平方完成と同じ．x，y，z でそれぞれ 3 回やるわけです．数学 II の $\boxed{186}$ も見といてください．

$\boxed{139}$ 繰り返しますが，球面の方程式は中心の座標と半径で決まります．(1) の場合だと，部屋の隅，床と壁にボールが接してとどまっている様子をイメージしよう．どのように球面の方程式を設定することができるのでしょうか．
(2) は，まあ一般型の球面の方程式からはじめましょか．それにしても円の場合と全く同じで全然面白くない問題やなあ．
数学 II の $\boxed{188}$ も見といてください．

$\boxed{140}$ まずは球面の方程式を立てよう．その上で $\boxed{135}$ の要領で，xy 平面との交わりの図形の方程式を求めよう．この図形が半径 $4\sqrt{2}$ の円だというだけ．

$\boxed{141}$ 先ほどの問題とは逆．xy 平面との交わりである円の方程式が与えられている時に，もとの球面の方程式を求めよという問題．よく考えれば，xy 平面との交わりである円の中心を通り xy 平面に垂直な直線上に，もとの球面の中心が存在します（イメージできる？）．ということは球面の中心は $(-1,\ 1,\ c)$ とおけるはず．では半径は？新たな文字を持ち出さなくても，c を用いて表現できますね．ヒントは**三平方の定理**．そういえば，円と直

線が交わったときの弦の長さに関する問題でも，三平方の問題を利用したよなあ．

$\boxed{142}$ 空間における平面の方程式は「通る点」と「法線ベクトル」で決まります．
つまり，点 $(p,\ q,\ r)$ を通り，法線ベクトル $(a,\ b,\ c)$ である平面の方程式は

$$a(x-p)+b(y-q)+c(z-r)=0$$

です．この公式に従えば，平面の方程式を求めることができます．
大切なことは，なぜこの式で平面を表すことができるのか，この式の意味をしっかりと理解することです．法線ベクトルを用いた直線の場合と全く同じ感覚です (『平面ベクトル』の $\boxed{72}$ 参照)，
ポイントは，**法線ベクトルが $\overrightarrow{n}$ の平面上の任意の直線は常に $\overrightarrow{n}$ と垂直であること**です．

$\boxed{143}$ 上の例題 14 を参照のこと．そのまんま．

$\boxed{144}$ ベクトル方程式の基本．直線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおきます．媒介変数 t を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\text{通る点の位置ベクトル})+t(\text{方向ベクトル})$$

とします．これが直線のベクトル方程式です．この式の意味は授業中に説明してます (t は目盛りのようなモノって言った)．ベクトルは縦書きで頼みます．『平面ベクトル』の $\boxed{70}$ も見よう．

$\boxed{145}$ 同じくベクトル方程式の基本．直線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおきます．
媒介変数 t を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\text{通る点の位置ベクトル})+t(\text{方向ベクトル})$$

とします．
この問題における方向ベクトルとは，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ または $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$．通る点の位置ベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ または $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$．よって，**人によっては式の形が異なる可能性がありますが**，全く問題ありません．『平面ベクトル』の $\boxed{71}$ も見よう．

$\boxed{146}$ まずは，$\boxed{145}$ の要領で，2 点 A， B を通る直線のベクトル方程式を媒介変数 t を用いて表現します．媒介変数 t とは目盛りのようなモノで，**t にいろいろな数値を代入することで，その直線上のすべての点が漏れなく表現される**のです．
直線と各平面との交点を求めるということは，いわば，**t にどんな数を代入すれば，直線上の点がその平面に乗っかるのか調べよ，**ということ．たとえば，xy 平面との交点を求めるには，z 座標が 0 になるような t を求めることになります．t の値が決まれば，それに対応する直線上の点が決定します．

$\boxed{147}$ これもまずは，$\boxed{144}$ の要領で，直線のベクトル方程式を媒介変数 t を用いて表現します．媒介変数 t とは目盛りのようなモノで，t にいろいろな数値を代入することで，その直線上のすべての点が漏れなく表現されるのです．
直線と球面との交点を求めるということは，いわば **t にどんな数を代入すれば，直線上の点がその球面に乗っかるのか調べよ**，ということ．直線上の点の x 座標，y 座標，z 座標を媒介変数 t を用いて表現し，球面との交点だから，連立 (つまり代入) すれば t の値が決定します．

$\boxed{148}$ **平行でない 2 直線は平面上なら必ず交わりますが，空間内では交わるとは限りません** (ねじれの位置)．つまり平面上なら 2 直線の傾き (いわゆる方向ベクトル) が異なれば交わることはわかりますが，空間で 2 直線が交わるかどうかの判定はなかなか難しいのです．
まずは，上の例題 15 をしっかり読んで理解しよう．
まずは 2 直線のベクトル方程式を媒介変数 s と t を用いて表現します．2 直線が交わるということは交点が存在するということ．交

点が存在するということは，2 直線上に共通の点が存在するということ．共通な点とは x，y，z 座標が一致するような点だから，x，y，z 座標が一致するような s と t が存在すれば 2 直線が交わるということなのです．