第 3 章　数列

2　等差数列とその和

補 2 つの等差数列の共通項

▷Point◁

① 等差数列の一般項 a_n の公式

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

を意味とともに日本語で覚える.

② 等差数列の和 S_n の公式

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$$

を意味とともに日本語で覚える.

③ キーワードは『初項』『末項』『公差』『項数』. これらのうち，すでに何がわかっているのか，何を求めなければならないのか，を常に意識すること.

152 これは「お受験」の問題ですか？

153 等差数列の一般項の公式に当てはめるだけです．第 10 項は，一般項を求めてから一般項の式に $n = 10$ を代入します.

154 等差数列の一般項の公式に当てはめるだけです．初項と公差は見ればわかります．第 10 項は，一般項を求めてから一般項の式に $n = 10$ を代入します.

155 基本的な問題．**初項と公差がわかれば等差数列は決定する**ということを強く意識しよう．(1)〜(3) すべての問題で，一般項の公式を用いるだけですね．最終的には単なる連立方程式の問題になるはずです.

156 授業でも取り上げた，基本的かつ，まあまあ重要な問題．**初項と公差がわかれば等差数列は決定する**ということを意識して公式に当てはめると，初項 a_1 と公差 d の連立方程式が現れます．初項と公差がわかれば等差数列の一般項がわかります.

157 等差数列とは，すべての (隣どおしの) 項の差が等しい数列のことです．だから，等差数列かどうかを調べるには，$a_2 - a_1$，$a_3 - a_2$，$a_4 - a_3$，$\cdots$ がすべて一定の値 (つまり公差) になることを示さねばならなりません．しかし，すべての場合を調べ尽くすことはできないから一般的に考える必要があります.
つまり，一般的に (漠然と)n 番目と $n+1$ 番目の差 $a_{n+1} - a_n$ が一定の値になることを示せば良いのです．**a_n は n の関数と考える**のであったから，**a_{n+1} は a_n の n を $n+1$ に置き換えたもの**になります.

158 本当ならば，3 つの数が等差数列になる場合，いろいろな順番が考えられます．本問の場合，特に何も書いてないのですが「この順番で」等差数列になるということでしょう．ちょっと不親切ですね.
3 数の間隔が同じなので，

$$3 - a = a^2 - 3$$

で終わりです.
さて，教科書などには「等差中項」という考え方が載っています．例えば，3 つの数 a，b，c がこの順で等差数列になるとき，各項の差が等しいから，b は a と c の平均 (相加平均) になります．つまり，

$$b = \frac{a+c}{2}$$

変形して

$$2b = a + c$$

このことが納得できない人は，公差を d として，真ん中の数 b を基準に考えて，

$$\begin{aligned} a &= b - d \\ b &= b \\ c &= b + d \end{aligned}$$

とすれば，$b = \dfrac{a+c}{2}$ となることが証明できます.
本問の場合は，そんな公式っぽいことを使わなくても大丈夫ですね.

$\boxed{159}$ 等差数列の和の公式に当てはめるだけ．和の公式は２通りありましたが，これは初項と末項で求めるパターンですね．

$\boxed{160}$ 等差数列の和の公式に当てはめるだけ．和の公式は２通りありましたが，初項と公差で求めるパターンですね．まあ初めに末項を求めてから $\boxed{160}$ の方法で和を求めても構いませんが．

$\boxed{161}$ 初項，末項，公差は見ればわかります．あとは項数が分かればよいですね．それぞれの等差数列の末項は何番目でしょうか？勢いとノリでやらないこと．正確には $\boxed{156}$ (2) の方法を用いるのが確実．

$\boxed{162}$ まずは，それぞれの条件に合う数を順番に書き出してみよう．等差数列になっていることがわかるはず．だったら，初項と公差，末項，項数などが分かれば和は求められますね．認する． $\boxed{161}$ と全く同じ方法で解決します．

$\boxed{163}$ 重要な問題です．(1) は公差が負の数だから，各項の数はどんどん減っていくので，いずれは負の数になるはず．そこで，初めて負の数になるのはいつか，という問題．つまり，$a_n < 0$ となる n のうち一番小さい n を求めよということです．(2) も同様で，$a_n > 100$ となる n のうち一番小さい n を求めよということ．結局，いずれも n の１次不等式を解くことになりますね．その結果から，n は自然数だから，n を決定することができます．まずは，それぞれの等差数列の一般項を求めましょう．

$\boxed{164}$ (1) は $\boxed{157}$ と同様．$a_{n+1} - a_n$ が一定の値になることを示せばＯＫ（言うまでもなくこの値が公差です）．初項は一般項において $n = 1$ を代入したもの．
(2) は当たり前すぎて何を証明すればよいのか戸惑ってしまいます．「明らか」で済ませたいところですが，あえてやれと言われたら，次のようにメンドウなことをせねばなりません．まず，

$$a_1 = b_1$$
$$a_4 = b_2$$
$$a_7 = b_3$$
$$\cdots$$

とおこう．$\{b_n\}$ が等差数列になっていることを示せば良いのだから，まずは b_n を求める（つまり b_n を n の式で表す）必要があります．添字（a の右下の小さい数字 $1, 4, 7, \cdots$）に注目して，添字の一般項を求めると $3n-2$ なので，

$$b_n = a_{3n-2}$$

となります．したがって，$b_n = a_{3n-2} = 3-4(3n-2)$ と n の式で表すことができるのです．あとは，これまでと同様に，$b_{n+1}-b_n$ が一定の値になることを示すだけ．この値が公差です．あ〜めんどくさ．正直どーでもよい問題．やめときましょう．

$\boxed{165}$ これも正直どーでもよい問題．あ〜めんどくさいので，やめときましょう．
どうしてもやりたい人は，$\boxed{164}$ の (2) と同様に，(1)〜(3) を新たな数列に置き換えて考えよう．
(1) は $c_n = a_{5n}$ とでもおいて，$c_{n+1} - c_n$ が一定の値になることを示すこと．
(2) は $d_n = 2a_n - 3b_n$ とでもおいて，$d_{n+1}-d_n$ が一定の値になることを示すこと．
(3) は $e_n = a_{2n} + b_{3n}$ とでもおいて，$e_{n+1} - e_n$ が一定の値になることを示すこと．
当然，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が等差数列になっていることを利用します．つまり，$a_{n+1} - a_n = p$(一定)，$b_{n+1} - b_n = q$(一定) をうまく使うのですが・・・

$\boxed{166}$ このような問題の場合，**真ん中の数字を基準に考えることがポイント**となります（$\boxed{158}$ を参照してください）．つまり，真ん中の数字を a，公差を d として，(1) の場合は３つの数を，

$$a-d,\ a,\ a+d$$

と，(2) の場合は 5 つの数を，

$$a-2d,\ a-d,\ a,\ a+d,\ a+2d$$

とおきます．いずれも和が分かっていることから，真ん中の数字 a が簡単にわかります．あとは 2 乗の和から d も決定できるはず．上の例題 16 の別解を参照のこと．

$\boxed{167}$ 「逆数にすれば等差数列になる」というんだから実際に逆数をとってみよう．x，y はすぐにわかります．その後，逆数の一般項を求めて (等差数列だから簡単)，またひっくり返して元に戻すだけの実につまらない問題．

$\boxed{168}$ **初項と公差がわかれば等差数列は決定する**ということを強く意識すること．まずは，初項 a_1，公差 d とおいて等差数列の和の公式に当てはめます．$S_{10}=100$，$s_{20}=400$ を連立させると，初項と公差が決定します．したがって第 30 項までの和 S_{30} も計算できるはず．
しかし，しかし，しかし，そんなことをしなくても実は簡単に求めることができます．
以下に計算式だけを書いておくと，

$$400-100=300$$
$$300+(300-100)=500$$

よって，$S_{30}=100+300+500=900$.
さて，これらの式の意味がわかるでしょうか．ヒントは台形の面積なのですが・・・

$\boxed{169}$ 要するに，もともとの等差数列の一部分の和を求めよということ．一部分であっても等差数列であることには変わりないのだから，該当する部分の初項や末項，項数などを調べていくことになります．まずはもとの数列の一般項を求めて，300 や 500 にもっとも近い項 (正確に言えば 300 より大きい最小の数と 500 より小さい最大の数) を具体的に探すこと (300 や 500 そのものが現れるかどうかはわからない)．不等式を持ち出してもいいし，ベタだが具体的に n にいろいろ数字を入れて調べても良いです．要するに 300 より少しだけ大きい数 (つまり初項に相当) と 500 よりも少しだけ小さい数 (つまり末項に相当) を確定できたら，あとは項数を数えて終わりです．

$\boxed{170}$ 重要な問題です．(1) は $\boxed{163}$(1) と同様なので問題ないでしょう．(1) の結果から，(2) の和が最大になるのは第何項目までのときか判断できます．要するに，**たとえ足す数字が小さくなっていったとしても，正の数を足す限り (少しずつではあるが) 確実に大きくなる**という事実に基きます (勉強も同じですね．たとえ少しずつでもコツコツ積み上げれば必ず成長するということを示唆しています)．なお，初項から第 n 項までの和を n の式で表すと n の 2 次関数になるから，この最大値を考えるという方法もあります (n^2 の係数が負の数なので最大値は必ず存在する)．でもあまりおススメしません．その理由は・・・やればわかります．メンドウなことになるはず．

$\boxed{171}$ このような問題では**ベン図のイメージを持つこと**が重要です．1 から 300 までの数全体の集合を U(全体集合)，3 で割りきれる数の集合を A，7 で割り切れる数の集合を B とするとき，U，A，B の包含関係をベン図に描いて (1)(2) がそれぞれ図のどの部分に相当するのか考えよう．包含排除の基本公式

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

を利用します ($n(\quad)$ は集合に含まれる要素の個数を表す)．
当然ながら「かつ ($\cap$)」と「または ($\cup$)」を間違えないようにしよう．
数列の問題というより，集合の問題ですね．

$\boxed{172}$ (1) は $\boxed{156}$(2) に同じです．(2) は，まず初項から第 n 項までの和 S_n を n の式で表そう．S_n は n の 2 次式になります．この式の値が 1000 より大きくなる n を求めるですが，実際に $S_n>1000$ という 2 次不等式を解くのはかなりメンドウです (悲惨なことになります)．上の例題 16 を参照しよう．つ

まり，テキトーな数字を代入して 1000 より大きくなる n を実際に見つけ出せばよいのです．つまり「カン」ですね．

173 なかなかイメージしにくい問題．このような問題では，まずは具体的な数字に当てはめて計算し，実際に確かめてみることが大切です．

例えば，$a=2$，$b=5$ としてみると，$2=\dfrac{10}{5}$，$5=\dfrac{25}{5}$ だから $\dfrac{10}{5}\sim\dfrac{25}{5}$ の中から整数を除いた，

$$\frac{11}{5},\ \frac{12}{5},\ \frac{13}{5},\ \frac{14}{5}$$

$$\frac{16}{5},\ \frac{17}{5},\ \frac{18}{5},\ \frac{19}{5}$$

$$\frac{21}{5},\ \frac{22}{5},\ \frac{23}{5},\ \frac{24}{5}$$

の合計 12 個の分数を足すことになります．これらの分数の合計を計算するには，まずは整数も含めて全部足して，最後に整数だけを引けばよいでしょう．つまり，

$$\left(\frac{10}{5}+\frac{11}{5}+\cdots+\frac{25}{5}\right)$$

$$-\left(\frac{10}{5}+\frac{15}{5}+\frac{20}{5}+\frac{25}{5}\right)$$

$$=\frac{10+11+\cdots+25}{5}-(2+3+4+5)$$

これで少しはイメージがつかめたはず．あとは，問題の通りに，a，b で一般的に計算すればよいのです．

この問題は，

数列の問題では具体的に書き出して考えてみる

という最も重要なことを体験させる問題だと思います．とにかく，わけのわからん数列が出てきたら具体例を書き出して考えるクセをもっていてください．

174 ようするに，

$$S_n=S_m\Longrightarrow S_{m+n}=0$$

を示すのだから，$S_n=S_m$ の式をなんとかどうにか変形して，$S_{m+n}=0$ という式を導き出せということです．まずは，等差数列の和の公式にしたがって，

$$S_n=\frac{n(2a+(n-1)d)}{2}$$

$$S_m=\frac{m(2a+(m-1)d)}{2}$$

$$S_{m+n}=\frac{(m+n)(2a+(m+n-1)d)}{2}$$

だから，$S_n=S_m$ より

$$n(2a+(n-1)d)=m(2a+(m-1)d)$$

この式をうまく変形して (ヒントは因数分解)，$S_{m+n}=0$，つまり

$$(m+n)(2a+(m+n-1)d)=0$$

を導きだしてください．なお，式変形の途中で $m\neq n$ であることを用いることになります．

この問題は数列の問題というより，単なる式変形の問題．示すべき目標をしっかりとにらみつつ，式変形してほしいですね．

175 具体的に $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を書きだして共通する数字を抜き出せば簡単にわかることなんですが，これを厳密に証明せよという問題．正直どーでも良い問題なので，やらんでよろしい．上の例題 18 の指針だけで十分です．