第 3 章　数列

3　等比数列とその和

研究 複利計算と等比数列

▷Point◁

① 等比数列の一般項 a_n の公式

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

を意味とともに**日本語**で覚える．

② 等比数列の和 S_n の公式

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \quad (r \neq 1)$$

を意味とともに**日本語**で覚える．

③ キーワードは『初項』『末項』『公比』『項数』．これらのうち，すでに何がわかっているのか，何を求めなければならないのか，を常に意識すること．

176 お子様向けの問題．これも「お受験」の問題？

177 等比数列の一般項の公式に当てはめるだけ．初項と公比は見ればわかります．第 5 項は，一般項の式に $n=5$ を代入（まあ順番に書き出してもわかるけど）．

178 等比数列の一般項の公式に当てはめるだけ．

179 **初項と公比がわかれば等比数列は決定する**ということを意識して公式に当てはめると，初項 a_1 と公比 r の連立方程式が現れます。まずはこれらをを解いて初項と公比を求めます．うまく式変形しよう．

180 等比数列とは各項の比が等しい数列のことだから，3 つの数 a，b，c がこの順で等比数列になるとき，

$$b^2 = ac$$

が成立します．このことが納得できない人は，公比を r として，真ん中の数 b を基準に考えて，

$$a = \frac{b}{r}$$
$$b = b$$
$$c = br$$

とすれば，$b^2 = ac$ となることが証明できます．なお，各項が正の場合は，b は a と c の相乗平均になります．つまり，

$$b = \sqrt{ac}$$

です．
もっとも，そんな公式っぽいことを使わなくても，$a \div 2 = \frac{9}{2} \div a$ で終わりですが，a は 0 ではないことを一言付けくわえる必要があるでしょう．

181 等比数列の和の公式に当てはめるだけです．

182 まずは等比数列の一般項の公式を利用して**項数を求める**必要があります．そのあとは等比数列の和の公式に当てはめるだけです．

183 初項と公比は見ればわかります．あとは等比数列の和の公式に当てはめるだけです．

184 158 と 180 を参照のこと．a，b の関係式ができるのでそれを解けば終わり．

185 このような問題の場合，166 の場合と同じく，**真ん中の数を基準に考える**ことがポイント．つまり，真ん中の数を a，公比を r とおくと，3 つの数は $\frac{a}{r}$，a，ar と表すことができます．これらの積が 216 であることから a の値は簡単に求められるのです．あとは和から r の値も決定できます．

186 初項と第 2 項の数より，もし等差数列になるならば公差が 4，等比数列になるならば公比が 3 になるはず．あとは，954 という項がその数列の中に存在するかどうかを調べればよいですね．

187 $b_n = \log_2 a_n$ とでもおいて考えよう．この $\{b_n\}$ が初項 2，公差 -1 の等差数列になる

ことから一般項 b_n が求められます．その後，a_n に変形すれば良いのです．
$\{a_n\}$ が等比数列であることを示すには，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ が一定の値になっていることを確認すればＯＫ．この一定の値が公比になることは言うまでもありませんね．log があるので一瞬ドキッとするけど，置き換えて考えれば問題ないでしょう．まあ，正直どーでもよい問題ですね．

188 要するに，等差数列と等比数列を足し合わせろというだけ．公差 d と公比 r を設定して式を作ると，**文字が 2 つなのに式が 3 つというアリガタメイワクな状態**になります．こんな連立方程式を解くのは初めてかもしれません (実は空間の直線の問題でやってるんですが・・・例題 15 を参照のこと)．まずは，3 つの式のうち適当な 2 つの式に注目して (当然，次数の低い式 2 つを選択するだろう)，d と r を決定し，それが残りの 3 つ目の式を満たしているかどうかチェックするのです．上の例題 19 を参照しよう．これは数列の問題ではないですね．

189 (1) は等比数列の和の公式に当てはめるだけ．なお，$2^{10} = 1024$ **は常識としておきたい**ところ．
(2) は第 3 項までの和だから，わざわざ和の公式を持ち出さなくてもできます (ていうか持ち出さないほうが良い)．つまり第 2 項が 6 だから公比を r とすれば，初項から第 3 項までの数は $\dfrac{6}{r}$，6，$6r$ と表すことができますね．これらの和が 21 になるだけです．

190 これも先ほどと同様，下手に和の公式を持ち出す必要はありません．(1) では，初項から第 4 項までの数を

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3$$

とおいて，(2) では，初項から第 6 項までの数を

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ ar^4,\ ar^5$$

とおいて連立方程式を作ればよいでしょう．あとはうまく式変形して a と r を求めよう．まずは公比が簡単に求まるでしょうね．

191 等比数列の一般項の公式より

$$a_n = 1 \times 3^{n-1}$$

だから，初めて 100 より大きくなるのは $a_n > 100$，つまり，$3^{n-1} > 100$ を満たす最小の n を求めることになります．また，等比数列の和の公式より

$$S_n = \frac{1(1-3^n)}{1-3} = \frac{3^n-1}{2}$$

だから，和が初めて 1000 を超えるのは $S_n > 1000$，つまり，$3^n > 2001$ を満たす最小の n を求めることになります．これらの不等式を満たす n は**実際に n にいろいろ数を代入して見つけるのが一番手っ取り早いのです**．ちなみに 2^{10} はだいたい 1000 ですが，3^{10} はだいたい 60000 ！すでに 60 倍もの差があります．凄い！

192 この問題は大切です．等比数列の和の公式より

$$S_n = \frac{2(1-3^n)}{1-3} = 3^n - 1 > 10000$$

だから，$3^n > 10001$ となる最小の n を求めることになります．
先ほどにも述べたように，3^{10} はだいたい 60000 なので，3^9 は 20000 くらい．だから，求める n は $n = 9$ だろうと見当はつきますが，問題文に $\log_{10} 3$ の値が指示されているので，これを用いて正確に答えよということなのでしょう (明らかに答えがわかるのにやる意味あるんかな)．
$3^n > 10001$ の両辺に $\log_{10}$ を施しても計算できない ($\log_{10} 10001$ の値は不明) ので，**「10001 と 10000 はほとんど同じ」と大胆に解釈して**，$3^n > 10000$ としてから両辺に $\log_{10}$ を施します．すると計算が進んで ($\log_{10} 10000 = 4$)，n の範囲が分かり，そこから n の値を決定することができます．

しかし，「勝手にそんなことをしても良いのか」と疑問に思う人もいるかもしれませんので少し補足説明しておきましょう．まず，

$$3^n > 10001 \Longrightarrow 3^n > 10000$$

は論理的に正しいので，$3^n > 10000$ として計算をすることに問題はありません．しかし，

$$3^n > 10000 \Longrightarrow 3^n > 10001$$

は論理的に正しくないので，$3^n > 10000$ から出た結果が $3^n > 10000$ を満たすかどうかはわかりません．したがって，**出た結果が正しいかどうか，つまり $3^n > 10000$ を満たすかどうかを最後に確認する必要があります．** この確認さえ怠らなければ勝手にそんなことをしても問題ないのです．

$\boxed{193}$ 約数の個数や約数の和に関する問題は，『数学 A』の「場合の数」の単元で学習済みです（各自で『数学 A』の教科書 P15，4STEP 問題集『数学 I+A』$\boxed{17}$ を見ておくこと）．だから，説明しな～い．上の例題 20 を参照のこと．約数の総和に等比数列の和が関係しているとは！

$\boxed{194}$ まずは，S，P，T を n の式で表しましょう．いうまでもなく，

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}$$
$$P = 1 \times 2 \times 2^2 \times 2^3 \times \cdots \times 2^{n-1}$$
$$T = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

P を計算するときは指数法則に注意すること，また T は公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であることに注意すること（上の例題 21 を参照せよ）．

さて，次にこれらの結果を利用して等式 $S^n = P^2T^n$ が成り立つことを（等式の証明のルールに従って）証明するのですが，まともに代入して，（左辺）＝（右辺）を示そうとしても計算がうまくいきません．ここで少し工夫が必要．つまり

$$S^n = P^2T^n \Longleftrightarrow \left(\frac{S}{T}\right)^n = P^2$$

と変形してから計算を始めればよいのです．$\frac{S}{T}$ が実はシンプルな形になります．

$\boxed{195}$ ホンマにどーでもいい問題．あえて背景を追求するなら，等差数列と等比数列の各項の間隔のバランスについて考察させる問題．裏の解答を見て勝手にやっといて．まあ，やるだけ無駄やけど．

『数列』という単元は，たしかに「等差数列」や「等比数列」が基本にあるのは言うまでもないですが，「等差数列」「等比数列」の知識だけで問題を作ろうとするから，このような変な問題に仕上がってしまうです（ここで自信をなくしてもらうと困る！）．だから，あまり気にせず次の章に進んでください．次からの内容のほうがはるかに重要．「等差数列」と「等比数列」は，一般項と和の公式だけ頭に入っていれば大丈夫です．あとはいらん．

$\boxed{196}$ 正直どーでも良い問題．やらんでよろしい．大人になったらわかるります．その時に考えたらええでしょう．借りすぎには注意しましょう．**ご利用は計画的に．**

$\boxed{197}$ だからぁ～，正直どーでも良い問題やってゆうてるでしょう．やらんでよろしい．大人になったらわかるわ．その時に考えたらええです．借りすぎには注意しましょう．**ご利用は計画的に．**