第3章　数列

4　和の記号Σ

5　階差数列

これまで「等差数列」「等比数列」を学習してきましたが，その知識をもとに，いよいよ『数列』分野の中枢部分を学習します．特に理系の人は，ここからの内容が『微積分』や『確率』など様々な分野と融合していくので，とても重要な分野になります．しっかりと理解して自分のモノにしてください．

▷Point◁

① まずは次の Σ の公式を正確に暗記する．

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

また，これらの公式は状況に応じて変化するので注意すること．

② 次の Σ の公式は意味を考えて正確に暗記する．

$$\sum_{k=1}^{n} c = \overbrace{c+\cdots+c}^{n\text{ 個}} = nc \quad (c\text{ は }k\text{ とは無関係の定数})$$

③ 次の公式は Σ で書いてあるだけで，単なる初項 r^1， 公比 r， 項数 n の等比数列の和の公式である．

$$\sum_{k=1}^{n} r^k = \frac{r^1(1-r^n)}{1-r}$$

特に，$\sum\limits_{k=1}^{n} 2^k$ と $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$ とを混同しないように注意しよう．

④ **Σ の公式は状況に応じて変化する．**次の式は，① の公式の n をそっくりそのまま $n-1$ に置き換えたものである．

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}(n-1)n$$
$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$
$$\sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \left\{\frac{1}{2}(n-1)n\right\}^2$$

このような変化は他にもいろいろあるので，その時々に応じて，自分で作っていかねばならない．Σ の公式は変容する．

198 まあ，地道に計算してもできるでしょうが，Σ の公式に当てはめれば早く正確に計算できます．つまり，
(1) は，$\sum\limits_{k=1}^{16} k^2$ と書けるので $\sum_{k=1}^{n} k^2$ の公式に $n=16$ を代入すればよく，
(2) は，$\sum\limits_{k=1}^{9} k^3$ と書けるので $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$ の公式に $n=9$ を代入すればよい，
ですね．

199 この問題は，$Sigma$ 記号で表された数列を具体的に書き出すというもの．これが意外と大切な作業で，侮らずに書き出してください．

200 この問題は，$\boxed{200}$ とは逆に，和を Σ を用いて表すだけの実にしょーもない問題．
数列の和を求める手順は，

▷Point◁

$\boxed{\text{Step ①}}$ k 番目の項を k を用いて表す．
$\boxed{\text{Step ②}}$ 末項が何番目になるのか考えて
和を Σ を使って表現．
$\boxed{\text{Step ③}}$ Σ 計算実行．

である．あとは式が勝手にやってくれます．したがって，それぞれの数列の特徴（(1) は等差数列，(2) は等比数列）を考えて k 番目を k の式で表そう．それを Σ で表すだけ．表すだけではつまらないので，いちおう計算もやっときましょうか．

201 $\boxed{198}$ に同じ．Σ の公式および等比数列の和の公式に当てはめるだけ．なお，(2) は l で書かれてはいますが，

$$\sum_{l=1}^{15} l^2 = \sum_{k=1}^{15} k^2$$

なので気にする必要はありません (具体的に書き出せば等しいのは明らか).

202 Σ 計算のルールに従って計算しましょう.
まず，**Σ は和や差に関しては分解できるが，積と商に関しては分解できません．**
つまり (3) は Σ の中身を展開してから計算を行う必要があります．(4) は等比数列の和の公式で．**等比数列の和の公式は日本語で覚えよ，という僕の考えが痛切に身にしみるでしょう．**

203 もう一度述べますが，数列の和を求める手順は，

▷Point◁

Step ① k 番目の項を k を用いて表す.

Step ② 末項が何番目になるのか考えて和を Σ を使って表現.

Step ③ Σ 計算実行.

です．あとは式が勝手にやってくれます.
したがって，まずは，それぞれの数列の規則性を考えて k 番目を k の式で表そう．なお，授業中にも注意したように，**くれぐれも，末項の n を k に変えただけ…とは絶対に思わないこと．**あくまでも数列の途中，漠然と k 番目をつかまえることが重要です．そうでないと，絶対にミスります.

204 くどいようですが，もう一度だけ述べます．数列の和を求める手順は，

▷Point◁

Step ① k 番目の項を k を用いて表す.

Step ② 末項が何番目になるのか考えて和を Σ を使って表現.

Step ③ Σ 計算実行.

です．あとは式が勝手にやってくれます.

本問の場合，k 番目の項自体が和の形で表現されています．つまり，**k 番目の項を k で表すために，すでに和の計算をせねばならない**状況なのです．(1) だと，

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= 2+4 \\ a_3 &= 2+4+6 \\ &\cdots \\ a_k &= 2+4+6+\cdots \\ &\cdots \\ a_n &= 2+4+6+\cdots\cdots+2n \end{aligned}$$

だから，まずは k 番目の数は

$$\begin{aligned} a_k &= 2+4+6+\cdots+2k \\ &= \sum_{l=1}^{k} 2l \\ &= k(k+1) \end{aligned}$$

と表すことができます．したがって，求める (もともとの) 数列の和 S_n は，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$$

となります．あとの計算は問題ないでしょう.
なお，一気にまとめて表現すれば，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sum_{l=1}^{k} 2l \right\}$$

という 2 重 Σ の形になります．これは後ほど出てくる 211 の形に他なりません.
(2) も同様．まずは k 番目の数を k で表そう．この場合，k 番目の数がすでに等比数列の和になっています.

205 もとの数列の規則性がよくわからない場合，各項の差をとってみて，差に規則性がないか調べることはよくやる手段です．差に規則性がある場合，その規則性を利用してもとの数列の一般項を求めるのが階差数列の考え方です.

▷Point◁

☆階差数列を利用して一般項を求める方法☆
$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする．つま

り，$a_{n+1}-a_n=b_n$ であるとき，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k\ \ (n\geqq 2)$$

が成立する．なお，**この計算で出た結論が $n=1$ の場合に一致しているかどうかを最後に必ず確認すること．**

まずは，差の規則性を把握することから始まります．差をとってみましょう．
(1) の場合，階差数列は 1，2，3，4，… なので，階差数列の一般項は n です．よって，

$$a_n=2+\sum_{k=1}^{n-1}k\ \ (n\geqq 2)$$

(2) の場合，階差数列は 1，4，9，16，… なので，階差数列の一般項は n^2 です．よって，

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}k^2\ \ (n\geqq 2)$$

(3)(4) も同様．
なお，この計算で出た結論が $n=1$ の場合に一致しているかどうかを最後に必ず確認すること．

206 S_n を含んだ漸化式は，次のポイントに従うのみ．

▷Point◁

☆ S_n を含んだ漸化式のポイント☆
$n=1$ のとき，$a_1=S_1$　… ①
$n\geqq 2$ のとき，$a_n=S_n-S_{n-1}$　… ②
まとめて表記すると

$$a_n=\begin{cases}S_1 & n=1\\ S_n-S_{n-1} & n\geqq 2\end{cases}$$

が成立する．なお，**② で出た結論が ① の場合に一致しているかどうかを最後に必ず確認すること．**

ということは，階差数列の考え方に似ていることに気付くでしょう．最後の確認部分も全く同じです．しかし，階差数列の場合，最後の確認で「ズレ」が生じることはほとんどなかったが，S_n を含んだ漸化式の場合，かなりの頻度で「ズレ」が生じることがあります．一瞬，間違えたのかと「ギョッ」とする場面ですが，次の見分け方を知っておけば，驚く必要もないでしょう．

▷Point◁

☆「ズレ」るかどうかの見分け方☆
$S_0=0$ のとき，ズレない．
$S_0\neq 0$ のとき，ズレる．

したがって，問題文の式を見れば，(1)(3) はズレない，(2) はズレることがすぐにわかります．

207 順番に**内側の Σ から計算**していくしかありませんね．複数の文字が出現するので混乱するかもしれませんが落ち着いて計算を進めよう．先ほど紹介した $\boxed{204}$ のような問題が背景にあります．ところで，(2) の結果はなかなか美しい結果だと思いませんか？

208 やや式が複雑なだけで，$\boxed{204}$ に全く同じ．やはり，まずは k 番目の数を k で表します．

209 この問題は多くの生徒が悩む問題です．でも厳しい言い方をすれば，この問題に悩むということは数列の和を Σ を用いて計算する基本が身についていないということです．**末項を見るのではなく，漠然と k 番目の項を見て k 番目の項を k の式で表す**という基本とおりにやるだけなのです．$\boxed{151}$ を参照しよう．

210 もとの数列の規則性がよくわからない場合，とりあえず各項の差をとってみて，差に規則性がないか調べるのは常套手段です．その差の規則性を利用してもとの数列の一般項を求めるのが階差数列の考え方です．
$\boxed{205}$ は 1 回差をとれば，差の規則性がすぐにわかりました．しかし，本問の場合は 1 回差をとっただけでは規則性がわかりません．この場合は，**さらにもう一度差をとって，規則性が分かるまでひたすら差をとり続ける**のです．(1) の場合，

$$\{a_n\} : 0,\ 4,\ 18,\ 48,\ 100,\ 180,\ 294,\ \cdots$$

$\{b_n\}$：4，14，30，52，80，114，…

$\{c_n\}$：10，16，22，28，34，…

このように 2 回差をとると初めて規則性が浮かび上がってきます．つまり，階差数列の計算を 2 回やれということ．なお，入試で出題される階差数列の問題も 2 回が限界です．回数を増やしても，同じことの繰り返しでメンドウなだけなんでね．

$\boxed{211}$ いきなり出題されるとどうしてよいかまったくわからないでしょう．なかなかな難問．まずは，

$$T_n = a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n = n(n+1)$$

とおきましょう．
今回の問題は，実は $\boxed{206}$ の S_n を含んだ問題がヒントになります．$\boxed{206}$ では，

$$S = n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

なので，

$$\begin{cases} a_1 = S_1 \\ a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geqq 2) \end{cases}$$

という関係式から a_n を求めることができましたが，今回は

$$T_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n$$

なので，上の関係式をそのまま用いることはできません．そこで，

$$ka_k = b_k$$

と置き換えることで，

$$\begin{aligned} T_n &= a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n \\ &= b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n \end{aligned}$$

となるので，

$$\begin{cases} b_1 = T_1 \\ b_n = T_n - T_{n-1} \quad (n \geqq 2) \end{cases}$$

となるのです．$T_n = n(n+1)$ だから，$T_{n-1} = (n-1)n$ です． よって，b_n が決定します．
b_n が決定すれば，a_n も決定できます．あとは，和 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ を計算するだけ．