第3章　数列

6　いろいろな数列の和

212　分数タイプの和を求める場合は，**部分分数に分ける**というのが鉄則．部分分数の分け方は「カンでやる」．つまり，**とりあえずテキトーに思い切って分けてみてあとから微調整**という方法をとります．なお，**和を計算するときは縦書きで行うのが鉄則**．絶対に縦書き！縦書き以外に考えらません．

213　このような分母に無理数を含むタイプの和を求める場合は，とりあえず**有理化する**というのが鉄則．で，この場合、有理化すると，分母から無理数は消えるが分子には無理数が残ってしまいます．ルートを含む和の公式なんてあったでしょうか？（そんなものはないですね・・・）．では，どうするのか．実は，これも縦書きで表現すると・・・

214　基本的に 204， 208 と同じ．**k 番目の項を k の式で表す**という基本とおりにやるだけです．なお，k 番目の項を k の式で表した時に分数型になった場合は，もう一つの基本事項，**部分分数に分ける**という鉄則にも従います．これまで学習したことを総動員する必要がありますね．なお，(2) を部分分数に分けるにはカンだけではダメで少しの知識が必要．

$$\frac{1}{A}-\frac{1}{B}=\frac{B-A}{AB}$$

上の式の右辺部に注目すると，分母が 2 つの積で，分子がその 2 つの差の場合に部分分数に分解できることがわかります．(2) の場合，k 番目の項を k の式で表すと $\dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$ になりますが，分母を展開すると，$\dfrac{2k+1}{k^2(k^2+2k+1)}$．上の式が頭に浮かんできませんか？

215　等差数列と等比数列のミックスタイプ．**ミックスジュースはコーヒーをかけると分離できる**という名言に従おう．コーヒー（公比みたいなもん）をかけて引くと純度１００％のピュアな等比数列が現れるのは不思議なことではないでしょうか．なお，引いた後のどの部分が等比数列に該当しているのか，特に，初項と公比は何なのかを慎重に見つける必要があります（ここで計算ミスする人が多い）．なお，(3) は公比みたいなもんが x なので，$x=1$ か $x\fallingdotseq 1$ かで場合分けが必要があるでしょうね．

216　犬プリで詳しく解説しています．そっちを参照してください．

217　犬プリで詳しく解説しています．そっちを参照してください．

218　犬プリで詳しく解説しています．そっちを参照してください．

219　173 でも述べたように，なかなかイメージしにくい問題では，**まずは具体的な数字に当てはめて計算し，実際に確かめてみること**が大切です．とりあえず，$n=5$ とでもしてみて具体的に考えてみよう．規則性を考えるために，次のようなマス目を書きます（このマス目が最大のポイントです）．

×	1	2	3	4	5
1	1×1	1×2	1×3	1×4	1×5
2	2×1	2×2	2×3	2×4	2×5
3	3×1	3×2	3×3	3×4	3×5
4	4×1	4×2	4×3	4×4	4×5
5	5×1	5×2	5×3	5×4	5×5

今回，(1)(2) で求める和は，上の表のどの部分の和なのでしょうか．まずは，該当する場所を枠で囲ってみよう．
(1) の場合，**異なる 2 つの項の積の和**だから，下表の $\boxed{}$ で囲まれた部分の合計を求めることになります．

×	1	2	3	4	5
1	1×1	$\boxed{1\times 2}$	$\boxed{1\times 3}$	$\boxed{1\times 4}$	$\boxed{1\times 5}$
2	2×1	2×2	$\boxed{2\times 3}$	$\boxed{2\times 4}$	$\boxed{2\times 5}$
3	3×1	3×2	3×3	$\boxed{3\times 4}$	$\boxed{3\times 5}$
4	4×1	4×2	4×3	4×4	$\boxed{4\times 5}$
5	5×1	5×2	5×3	5×4	5×5

場所が確定できたら，その枠内の数字の合計

を計算するために，枠内の数字の配列の特徴を考えてみよう．

まず，上の表に出てくる全ての掛け算の合計は $(1+2+3+4+5)^2$ になります (なぜだかわかる？)．左上から右下への対角線上には同じ数字の 2 乗 (1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2) が並んでおり，その対角線に関して対称的に数字が並んでいます．

これらの特徴を考えれば，$\boxed{}$ で囲まれた部分の合計は求められるはず．

(2) は**互いに隣り合わない異なる 2 つの項の積の和**だから，下表の $\boxed{}$ で囲まれた部分の合計を求めることになります．

×	1	2	3	4	5
1	1×1	1×2	$\boxed{1\times 3}$	$\boxed{1\times 4}$	$\boxed{1\times 5}$
2	2×1	2×2	2×3	$\boxed{2\times 4}$	$\boxed{2\times 5}$
3	3×1	3×2	3×3	3×4	$\boxed{3\times 5}$
4	4×1	4×2	4×3	4×4	4×5
5	5×1	5×2	5×3	5×4	5×5

(1) と同様に考えて，うまく合計してください．

$\boxed{220}$ $\boxed{173}$, $\boxed{219}$ でも述べたように，なかなかイメージしにくい問題では，**まずは具体的な数字に当てはめて計算し，実際に確かめてみることが**大切です．例えば，$n=5$ のときの様子を考えるために，

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)$$

を実際に展開してみて (ちょっとメンドウだが)，x^4 の係数，x^3 の係数がどのような計算過程を経て，算出されるのか考えよう．

それが分かれば，この問題は解けるでしょう．

$\boxed{221}$ 犬プリで詳しく解説しています．そっちを参照してください．