第３章　数列

7　漸化式と数列

発展　隣接３項間の漸化式

補　２つの数列の漸化式

漸化式とは，数列の特徴を項と項の間の関係に注目して表現したものに過ぎません．

漸化式攻略のコツは典型的なパターン学習にあり，基本的な型の解法を暗記してしまうことです．かなり詳しく犬プリで解説してあるので，じっくりと読もう．

222 いきなり第５項 a_5 はわかりません．漸化式に $n=1$ を代入すれば a_1 から a_2 が，$n=2$ を代入すれば a_2 から a_3 が，…，と順番に求められます．そう，数列から漸化式がつくられるのではなく，**漸化式から数列が作り出される**のです．この感覚はとても重要です．なお，この問題は順番に計算して a_5 を求めるだけなので，漸化式を解く必要はありませんが，いずれそのうち解く羽目になるので今のうちに解いておいてもよいでしょう．

223 基本問題．漸化式の意味を考えよう．
(1)(2) は $a_{n+1}-a_n$ が一定なので等差数列
(3)(4) は $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ が一定なので等比数列
です．等差数列，等比数列の一般項の公式に当てはめるだけです．

224 基本問題．2 項間の差 $a_{n+1}-a_n$ に規則生があります．いわゆる階差数列を利用するタイプ．階差数列の解法のルールに従おう．くれぐれも，等差数列タイプと混同しないように．例えば (1) で「公差 $2n$ の等差数列」と思ってしまう人が多いんですね．全く違います．

225 基本中の基本かつ最重要問題．この問題は犬プリでも詳しく解説してあるので，そちらを参照してください．

> $a_{n+1}=pa_n+q$ の解き方の流れ
>
> Step① 秘密の計算（$\alpha=p\alpha+q$）をして α を求める．
>
> Step② $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ と変形．
>
> Step③ 数列 $\{a_n-\alpha\}$ が初項 $a_1-\alpha$，公比 p の等比数列になっていることを確認．
>
> Step④ $a_n-\alpha=(a_1-\alpha)p^{n-1}$ より，a_n を求める．

ホンマに大切な問題なので，繰り返し何度も解いて，解法を定着させることです．**完全にマスターするまで先には進まない覚悟で取り組もう．**最低 2 回は解こう．

226 分数型漸化式の基本．$a_{n+1}=\dfrac{pa_n}{r_n+s}$ タイプの漸化式は**両辺の逆数をとる**というのが基本です．逆数をとって，うまく置き換えすれば，223 (1)(2)，または 225 に帰着できます．
なお，逆数をとるにあたり，数列の各項が 0 にはならないことに一言ふれるべきですが，上の例題 24 では $a_n \neq 0$ ではなく $a_n>0$ を示しています．この辺の事情も犬プリで詳しく解説してあります．

227 指数関数型の基本．このタイプも犬プリでも詳しく解説してあります．**両辺を何かで割ってうまく置き換え**してください．

228 最もやっかいなタイプ．この問題のタイプはマジでやっかいなのです．ポイントは漸化式 $a_{n+1}=3a_n+4n$ の最後の項 $4n$ をどう処理するかなのですが，ホンマに大変なので授業で 2 通りの方法をきちんと説明しました．ノートを見てください．問題文に置き換えの方法を指示してありますが，**なぜこのように置き換えをするのか背景をわかってないと意味不明でしょうね．**ノートを参考に自分で置き換えできるようになってほしいです．犬プリでも解説してありますが，以下に概略をもう一度述べます．

方法 ①　**レベルを 1 つ上げて互いに引く．**

$$\begin{array}{rl} a_{n+2} & =3a_{n+1}+4(n+1) \\ a_{n+1} & =3a_n+4n \\ \hline a_{n+2}-a_{n+1} & =3(a_{n+1}-a_n)+4 \end{array}$$

ここで，$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，

$$b_{n+1}=3b_n+4$$

となり，$\boxed{225}$ に帰着でき，b_n を求める (つまり n の式で表す) ことができます．b_n が決定すれば，

$$a_{n+1}-a_n=b_n\ (\longleftarrow n \text{の式になっている})$$

より，$\boxed{224}$ に帰着できて a_n が求められます．

この方法は，単純だが手間がかなり多いのでウンザリしてしまいます．そこで，次の方法を紹介しましょう．

$\boxed{\text{方法②}}$ **いきなり理想的な形に変形する．**

$a_{n+1}=3a_n+4n$ の最後の項 $4n$ を処理するために，$a_{n+1}=3a_n+4n$ が次のような理想的な形に大胆に変形できたと仮定します．**これが最初で最大の難関．**

$$a_{n+1}+p(n+1)+q=3(a_n+pn+q)$$

この変形をいきなり書くと，「なぜ左辺に $p(n+1)+q$ があるんですか？右辺と同じく $pn+q$ じゃダメなんですか？」と質問に来る人がいるのですが，この質問に対する答えとしては「未来を予想しているから」と答えたいですね．つまり，最終的に $a_n+pn+q=b_n$ とおいたときに，$a_{n+1}+p(n+1)+q$ を b_{n+1} とおけることを想定しているからなのです ($a_{n+1}+pn+q$ だと，b_{n+1} におくことができないですね)．

よって，

$$a_{n+1}+p(n+1)+q=3(a_n+pn+q)$$

展開して整理すれば，

$$a_{n+1}=3a_n+2pn-p+2q$$

これが，$a_{n+1}=3a_n+4n$ に漸化式として一致するので，係数比較して，

$$\begin{cases} 2p=4 \\ -p+2q=0 \end{cases}$$

これを解いて，$p=2$，$q=1$ と求まります．このことはつまり，$a_{n+1}=3a_n+4n$ が**次のように変形できることを意味している**のです．

$$a_{n+1}+2(n+1)+1=3(a_n+2n+1)$$

ここで，$b_n=a_n+2n+1$ とおくと，

$$b_{n+1}=3b_n$$

となり，$\boxed{223}$ (3)(4) に帰着でき，b_n を求める (つまり n の式で表す) ことができます．b_n が分かれば，a_n は簡単に分かるのです．

この方法は，最初の一歩が難しいですが，そこを乗り越えれさえすれば後半は非常に楽チンになるので，この方法を薦めます．後々にも役に立つ重要な考え方です．

$\boxed{229}$ これもうまく置き換えをするのですが，不思議な漸化式です．$\boxed{227}$ で両辺を割るときにどういうことを意識したでしょうか．**a_n に n 乗を対応させ，a_{n+1} に $n+1$ 乗を対応させるように割ったはず．**この感覚は重要です．この問題では，(1) の場合，$(n+1)a_{n+1}=na_n$ というように，すでに a_n に n が対応し，a_{n+1} に $n+1$ が対応しています (係数のこと)．つまり，$na_n=b_n$ とおけば良いのです．しかし (2) では，対応していないので，

$$na_{n+1}=(n+1)a_n \Longrightarrow \frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}$$

と変形．すると，$\dfrac{a_n}{n}=b_n$ とおくことができるのです．すべては，a_n に n を対応させ，a_{n+1} に $n+1$ を対応させるためです．

犬プリでは，もう一つ別の解法も紹介してありますので，合わせて参考にしてください．

$\boxed{230}$ S_n を含んだ漸化式です

$$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$$

を利用して，まずは a_n に関する漸化式に書き直す必要があります．

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= S_{n+1}-S_n \\ &= (2a_{n+1}-(n+1))-(2a_n-n) \\ &= 2a_{n+1}-2a_n-1 \end{aligned}$$

$$a_{n+1} = 2a_n + 1$$

漸化式ができました．これを解くには初項の値が必要です．$S_n = 2a_n - n$ に $n = 1$ を代入すると，$S_1 = 2a_1 - 1$．$S_1 = a_1$ なので，a_1 の値が分かりますね．

注　S_n を含んだ漸化式はすでに学習しました ($\boxed{207}$)．あのときは次のポイントに従いました．

> ☆ S_n を含んだ漸化式のポイント☆
> $n = 1$ のとき，$a_1 = S_1$　… ①
> $n \geqq 2$ のとき，$a_n = S_n - S_{n-1}$　… ②
> まとめて表記すると
> $$a_n = \begin{cases} S_1 & n = 1 \\ S_n - S_{n-1} & n \geqq 2 \end{cases}$$
> が成立する．**なお，② で出た結論が ① の場合に一致しているかどうかを最後に必ず確認すること．**

今回の場合は，一切， 場合分けせずに解いています．確かあの時は「$n \geqq 2$ の場合分けをしろ！」と強く言われたはずなのに，いいんでしょうか？

結論を言えば，大丈夫です．なぜなのかは犬プリで詳しく説明してあるのでそちらを参照してください．

$\boxed{231}$ 漸化式の文章問題．つまり文章を読んで**自分で漸化式を立てる**問題です．得てしてこのタイプの問題は「漸化式を立ててしまえば，あとは解くのは簡単」である場合が多いです．

この問題は，まずは自分で円を 1 つ，2 つ，3 つ， … と実際に書いていって考えるしかありません．円が複雑に交錯してわけわかんなくなってくるでしょうけど．でも，いくつか書き慣れれば，単なる予想なのか，予想でないのか，よくわからないまま a_{n+1} と a_n の関係式は作れると思います．今はこれでも構いません．裏の模範解答の文章を最後に読むだけでよいです．

$\boxed{232}$ $\boxed{231}$ と同じく自分で漸化式を作る問題ですが，さっきよりも考えやすいと思います．正方形 S_1， S_2， … はすべて相似形であるので，**相似比さえ分かれば S_{n+1} と S_n の関係式は簡単**に立ちますよね．

興味のある人は，n が限りなく大きくなったら (つまり n が無限大に近づいたら) どうなるのか考えてみてください．つまり，

$$\sum_{k=1}^{\infty} S_k \text{ の値を求めよ．}$$

この答えは数学 Ⅲ を学習すれば分かります．

$\boxed{233}$ これも漸化式を立てます．言うまでもなく漸化式とは p_{n+1} と p_n の関係式のことです．

p_n が n 回投げたときの点数が偶数である確率なので，p_{n+1} は $n+1$ 回投げたときの点数が偶数である確率です．偶数か奇数しかないので，p_n が n 回投げたときの点数が奇数である確率は $1 - p_n$ になります．

硬貨が表だと $+1$ 点，裏だと 0 なので，表の場合は偶奇が入れ代わり，裏だとそのままです．なお，今回の硬貨はイビツな形をしているらしく，表の出る確率が $\dfrac{1}{3}$．つまり裏の出る確率が $\dfrac{2}{3}$ です．

よって，$n+1$ 回目が偶数になるのは，

・n 回目が偶数で，$n+1$ 回目に裏が出る場合

・n 回目が奇数で，$n+1$ 回目に表が出る場合

であることが分かります．よって

$$p_{n+1} = p_n \times \frac{1}{3} + (1 - p_n) \times \frac{2}{3}$$

さて，あとは初項 p_1 の値を求めて漸化式を解きましょう．スタートが 0 点で，1 回投げて偶数点になるのですから，p_1 はわかりますね．

$\boxed{234}$ 記念すべき漸化式の最終問題は，なぜか再び分数タイプの漸化式です．しかし例題 24 や $\boxed{226}$ で学習したタイプとは異なることに気付くでしょう (分子の形が違う)．したがって，両辺の逆数をとってもうまくいきません．「じゃあ，どーすんねん」とキレそうになりますが，ありがたいことに誘導が付いています．**$b_n = \dfrac{a_n - 2}{a_n + 4}$ とおけば $\{b_n\}$ が等比数列になる**らしいです．よーわからんが，

指示どおり，b_n の関係式を作りましょう．でも，どうやって？

方法としては 2 通りあります．まず $b_n = \dfrac{a_n - 2}{a_n + 4}$ を変形して，a_n を b_n で表し，もとの漸化式に代入するのです．ちょっとメンドウですが確実にできます．

次の方法は，数列 $\{b_n\}$ が等比数列になると書いてあるので，$b_{n+1} = k\, b_n$ の形に変形できるはず，つまり，

$$\frac{a_{n+1} - 2}{a_{n+1} + 4} = k\, \frac{a_n - 2}{a_n + 4}$$

となる k を求めれば良いのです．なかなか思いつかない発想ですが，こちらのほうが本質的です．

しかし，そもそもなんで $b_n = \dfrac{a_n - 2}{a_n + 4}$ とおいたのでしょうか？分母，分子に登場する -2 や $+4$ という数字はどこからきたのでしょうか？大いに疑問が残りますよね．実は，この 2 つの数字には深い意味が隠されています．でもまあ，入試では必ず誘導がつくから，あんまり気にせんでよろしい．どうしても気になる人は犬プリに詳しく書いてあるので参照してください．

$\boxed{235}$ 隣接 3 項間漸化式とは連続する 3 項 (a_n，a_{n+1}，a_{n+2}) についての漸化式のことです．このタイプの漸化式が入試に出るかどうかは微妙です．

出たとしても必ず誘導があると思われるので，これまでに学習した漸化式のパターンをしっかり理解しておけば大丈夫でしょうが，やはり，どうしてそんな変形が可能なのか本質部分を理解しておいた方が．良いと思います．犬プリで詳しく解説してあるので，そちらを参照して自分でマスターしてください．

$\boxed{236}$ いわゆる連立漸化式の問題．上の例題 26 のようにノーヒントで出題されることはマレですが，例題 26 の「解答」と「別解」の両方をマスターしておきたいところです．なお，この $\boxed{236}$ は「解答」の方針に従って解くように誘導がなされています．つまり，

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n & \cdots ① \\ b_{n+1} = 3a_n + 4b_n & \cdots ② \end{cases}$$

① + ② より

$$a_{n+1} + b_{n+1} = 5(a_n + b_n)$$

これは，$\{a_n + b_n\}$ が初項 $a_1 + b_1$，公比 5 の等比数列であることを意味しています．また，① × 3 − ② より

$$3a_{n+1} - b_{n+1} = 3a_n - b_n$$

これは，$\{3a_n - b_n\}$ が初項 $3a_1 - b_1$，公比 1 の等比数列（つまり全部同じ数字）であることを意味しています．

どういうわけだかわかりませんが，誘導通りにやればうまくいきますね．しかしこんな式変形がどうやって出てきたのか不思議議です．