第 3 章　数列

8　数学的帰納法

数学的帰納法とは，自然数に関する命題を証明するための証明方法で，次の流れで証明が展開されます．

> ☆数学的帰納法の流れ☆
> $\boxed{\text{Step①}}$「$n=1$ のときに成立すること」を確認する．
> $\boxed{\text{Step②}}$「(もし)$n=k$ のときに成立すると仮定した場合，$n=k+1$ のときも成立すること」を確認する．
> $\boxed{\text{Step③}}$「以上より（将棋倒しの要領で）全ての自然数 n で成立することが証明された」と最後に述べる．

上の流れからも明らかなように，$\boxed{\text{Step②}}$が最大のヤマ場．この部分が数学的帰納法の中心部分なので，論理に破綻のないように正確に論証する必要があります．そこで，

> ☆数学的帰納法の証明のコツ☆
> いきなり本番の解答を書かない．必ず下書きを行ってから解答を書くこと．

を大原則にしておこう．

犬プリでも詳しく解説してあるので，そちらも参照すること．

なお，これまで通り，以下にヒントを紹介していきますが，あくまでも「証明問題」なので，必ず自分で証明を書いて先生に添削してもらうこと．出来ているつもりでも以外に論理が間違っている場合が多いんですよね．

237 この問題で数学的帰納法の証明の流れをつかもう．重要な基本問題．

(1) の場合，$\boxed{\text{Step ②}}$の部分は，$n=k$ のときに成立する式，

$$3+3\cdot4+3\cdot4^2+\cdots+3\cdot4^{k-1}=4^k-1$$

を自由に使って，$n=k+1$ のときの式，

$$3+3\cdot4+3\cdot4^2+\cdots+3\cdot4^{k-1}+3\cdot4^k=4^{k+1}-1$$

を導き出すことです．

まず，最初の式は自由に使ってよいのだから，両辺に $3\cdot4^k$ を加えて，

$$3+3\cdot4+3\cdot4^2+\cdots+3\cdot4^{k-1}+3\cdot4^k=4^k-1+3\cdot4^k$$

とします．なぜ両辺に $3\cdot4^k$ を加えたのかというと，最初の式を少しでも目的の式に近づけたかったためです．

$$4^k-1+3\cdot4^k=4^{k+1}-1$$

となることを証明すればよいのです．

(2) の場合，$\boxed{\text{Step②}}$の部分は，$n=k$ のときに成立する式，

$$1+10+10^2+\cdots+10^{k-1}=\frac{1}{9}(10^k-1)$$

を自由に使って，$n=k+1$ のときの式，

$$1+10+10^2+\cdots+10^{k-1}+10^k=\frac{1}{9}(10^{k+1}-1)$$

を導き出すことです．

まず，最初の式は自由に使ってよいのだから，両辺に 10^k を加えて，

$$1+10+10^2+\cdots+10^{k-1}+10^k=\frac{1}{9}(10^k-1)+10^k$$

とします．なぜ両辺に 10^k を加えたのかというと，最初の式を少しでも目的の式に近づけたかったためです．

$$\frac{1}{9}(10^k-1)+10^k=\frac{1}{9}(10^{k+1}-1)$$

となることを証明すればよいのです．

なお，(1) も (2) も単なる等比数列の和なので，数学的帰納法など用いなくても直接計算で証明できますね．今回の場合は反則行為ですがいちおうやっといてください．

238 数学的帰納法による倍数の証明問題も，とても重要な基本問題です．

この場合，$\boxed{\text{Step②}}$の部分は，$n=k$ のときに成り立つ関係式，

$$4k^3-k=3m\ (m\text{ は整数})$$

を自由に使って，$n=k+1$ のときに成り立つ関係式，

$$4(k+1)^3-(k+1)=3\times\boxed{?}$$

という形を導き出すことです.
$4(k+1)^3-(k+1)$ をうまく展開，整理し，途中で $4k^3-k=3m$ を代入しよう.
なお，数学的帰納法を用いない証明も紹介しておきます．問題文に「数学的帰納法によって」と書いてあるので，この解答は違反ですが，なかなか興味深い証明ではないでしょうか.

別解

$$
\begin{aligned}
4n^3-n &= 3n^3+n^3-n \\
&= 3n^3+n(n^2-1) \\
&= 3n^3+n(n+1)(n-1) \\
&= 3n^3+(n-1)n(n+1)
\end{aligned}
$$

$(n-1)n(n+1)$ は連続 3 整数の積だから 6 の倍数，つまり 3 の倍数．また $3n^3$ は明らかに 3 の倍数だから，$3n^3+(n-1)n(n+1)$ は 3 の倍数になる．よって，$4n^3-n$ は 3 で割り切れる.（証明終）

$\boxed{239}$ 少し複雑な式になっていますが，$\boxed{237}$ と基本的に同じ.
(1) の場合，$\boxed{\text{Step ②}}$ の部分は，$n=k$ のときに成立する式，

$$1+2\cdot\frac{3}{2}+3\left(\frac{3}{2}\right)^2+\cdots+k\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}=2(k-2)\left(\frac{3}{2}\right)^k+4$$

を自由に使って，$n=k+1$ のときの式，

$$1+2\cdot\frac{3}{2}+3\left(\frac{3}{2}\right)^2+\cdots+k\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}+(k+1)\left(\frac{3}{2}\right)^k=2(k-1)\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}+4$$

を導き出すことです.
まず，最初の式は自由に使ってよいのだから，両辺に $(k+1)\left(\frac{3}{2}\right)^k$ を加えて，

$$1+2\cdot\frac{3}{2}+3\left(\frac{3}{2}\right)^2+\cdots+k\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}+(k+1)\left(\frac{3}{2}\right)^k=2(k-2)\left(\frac{3}{2}\right)^k+4+(k+1)\left(\frac{3}{2}\right)^k$$

とします．**なぜ両辺に $(k+1)\left(\frac{3}{2}\right)^k$ を加えたのかというと，最初の式を少しでも目的の式に近づけたかったため**です．つまり，

$$2(k-2)\left(\frac{3}{2}\right)^k+4+(k+1)\left(\frac{3}{2}\right)^k=2(k-1)\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}+4$$

となることを証明すればよいのです.
(2) は式の変形が難しいですね．別紙，犬プリで詳しく解説してあるので，そちらを参照してください.
なお，(1) は等差と等比のミックスタイプなので，数学的帰納法を用いなくても証明できます．また，(2) も数学的帰納法を用いなくても証明できるのですが，この証明は少しマニアックなのでやめておきましょう．興味のある人は直接聞きに来てください．必ず感動します.

$\boxed{240}$ 数学的帰納法による不等式の証明問題．重要な問題です．不等式を数学的帰納法で証明する場合，**今まで以上に下書きが非常に重要な意味を持ってきます**．何を示せばよいのかを事前に想定して，そこに向かって証明を進めていくこと.

(1)(2) は犬プリでかなり詳しく解説したので，そちらを参照してください.

$\boxed{241}$ 基本的には $\boxed{238}$ と同様です．(2) は犬プリでも詳しく解説しました.
(2) ですが，$\boxed{\text{Step②}}$ の部分は，$n=k$ のと

きに成り立つ関係式,

$$2^{3k}-7k-1=49m\ (m \text{ は整数})$$

を自由に使って，$n=k+1$ のときに成り立つ関係式,

$$2^{3(k+1)}-7(k+1)-1=49\times\boxed{?}$$

という形を導き出すことです.
$2^{3(k+1)}-7(k+1)-1$ を上手に変形して $2^{3k}-7k-1=49m$ であることをうまく使おう.
$2^{3k}-7k-1=49m$ という式は $2^{3k}=49m+7k+1$ に変形した方が使い勝手がよいでしょう.

242 重要な問題．まず，**この漸化式は解けないことに気付かねばなりません**．そう，解くことができないのです．だから，a_2, a_3, a_4, $\cdots$ を実際に求めてみて,

一般項を予想 $\Longrightarrow$ 数学的帰納法で証明

という方法を取るしかないのです．予想だけでは証明になりません (なお，証明の方法は上の例題 29 を参照のこと)．漸化式を利用するだけなので，それほど難しい数学的帰納法ではないと思います.
この問題で大切なことは，ノーヒントで

『漸化式 $a_n^2=(n+1)a_{n+1}+1$ を解け』

と出題されても，**この漸化式は解けないことに自分で気付いて，自分で一般項を予想し，自分で数学的帰納法で証明する**ことなのです．大学入試では確実にノーヒントで出題されると思います．解こうと無為に時間を費やすよりも，さっさと諦めて帰納法に持ち込む習慣を身に付けてほしいです．さて，気づくかな？
これも犬プリで詳しく解説してあります.

243 まさに，**数学的帰納法は下書きが命**を実感させる問題です．上の例題 27 と同様なのですが，必ず「なぜ，$n=1$ と $n=2$ の場合を調べるんですか」「なぜ，$n=k$, $k+1$ のときを仮定するんですか」と質問にくる生徒が多いのです．ちゃんと下書きをしていない証拠ですね．あ〜あ.
始めからこのような証明の形になるのではありません．下書きをして初めて「あっ，普通の帰納法ではあかん」と実感するのです．そこで，証明に修正を加えて，模範解答のような形が出来上がるのであって，つまり，いきなりこのような帰納法の形になるかどうかは，誰にも予測できないのです．だから，まず下書きして，ヤバさに自分で気づいて，そして，新たな形を自分で作っていくのです.
本問の場合,

$$x^{n+2}+y^{n+2}=(x^{n+1}+y^{n+1})(x+y)-xy(x^n+y^n)$$

の式をみて，$x^{n+2}+y^{n+2}$ は，$x^{n+1}+y^{n+1}$ と x^n+y^n から構成されていること，つまり，$x^{n+1}+y^{n+1}$ と x^n+y^n が決まらないと $x^{n+2}+y^{n+2}$ は決定しないことを感じるのです．この感覚が，数学的帰納法の証明のスタイルを決める決定打となるのです.
つまり，$x+y$ と xy が整数なので,

$$x^n+y^n,\ x^{n+1}+y^{n+1} \text{が共に整数}$$
$$\Longrightarrow\ x^{n+2}+y^{n+2} \text{も整数}$$

であることがわかりますね.
つまり，$n=k$ のときに整数になるからといって，$n=k+1$ のときも整数になるとは限らないのです.
$n=k$, $k+1$ のときに整数になるときに限り，$n=k+2$ のときも整数になるのです.
これらのことを下書きの段階で気づき，数学的帰納法の証明を書き始めよう.
こちらも犬プリで解説してあります.