第1章　平面上のベクトル

第1節　平面上のベクトルとその演算

4　ベクトルの内積

☆この章のポイント☆

① ベクトルの内積の定義

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$$

を覚えること (θ は $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角である).

特に，その定義が，内積の値，大きさ，角度の三位一体である点を意識すること.

② 成分表示されたベクトルの内積の値は簡単に求められる．つまり，$\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}$ のとき，

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=pr+qs$$

③ ベクトルの絶対値は 2 乗しないと先に進まない.

④ 同じベクトルの内積は絶対値の 2 乗になる.

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}=|\overrightarrow{a}|^2$$

⑤「垂直」とくれば「内積 $=0$」.

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0\iff\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$$

24 基本問題．内積の定義に当てはめるだけです.

25 基本問題．内積の定義に当てはめるだけですが，**ベクトルのなす角の測り方**に注意が必要．ベクトルのなす角は始点をそろえて測ります.

26 基本問題．なす角 θ を求めるには，$\cos\theta$ の値が分かればよいのです．これも，内積の定義に当てはめるだけ．ところで，いろいろな角度の cos の値は覚えているでしょうね.

27 基本かつ重要問題．**成分表示されている場合は，内積の値は簡単に求まる**のでした．ベクトルの大きさも計算できます．あとは，内積の定義に当てはめて，$\cos\theta$ の値を求めよう．授業でも取り上げた重要問題．この問題は必ずテストに出るでしょう.

28 単位ベクトルとは，長さが 1 のベクトルのことです．$\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$ とは，先っちょの座標が $(1,\ -\sqrt{3})$ にあるようなベクトルのことだから，問題は「このベクトルに垂直な長さ 1 のベクトルを求めよ」ということ．まあ，以上のことを踏まえて，座標平面上に図示して考えれば，答えは求まるでしょう.

しかし「そんなんメンドウや」という人は，求めるベクトルを，$\overrightarrow{e}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ とでもおき，$\overrightarrow{e}$ が $\overrightarrow{a}$ と垂直であること，$\overrightarrow{e}$ の大きさが 1 であること，という 2 つの条件を式で表せば簡単に機械的に解けます.

「垂直」とくれば「内積がゼロ」はほとんど条件反射です.

29 (1) は，それぞれのベクトルを成分表示して内積計算．やや面倒ですが，やることは単純です．(2) は (1) で内積の値が分かっているので角度は計算できます．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の値を利用すれば角 A が，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ の値を利用すれば角 C が，それぞれ求められます.

ところで (1) の 2 つ目の式は，なぜ $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となってるんでしょうね？ $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ なら角 B を求めるのに使えるのですが。。。まあ，あんまり気にしないでおきましょう.

なお，この問題は (2) だけ単独で出題されてもできるようにしておくこと.

30 重要な内積の式変形問題．(1)(2) はそのまま展開するだけです，**同じベクトルの内積は絶対値の 2 乗になる**というのは常識としておきたいところ．(3) は $\overrightarrow{p}$ に関する 2 次式とみて平方完成しているのだが，なかなか難しい変形ですね (特に絶対値がつくあたりが).

右辺を展開して，左辺になることを示してもよいでしょう．なお，この変形はいずれ円の

ベクトル方程式を考える上で重要になる式変形です．そのうち実感します．

31 重要問題．いずれも**ベクトルの絶対値は 2 乗しないと先に進まない，同じベクトルの内積は絶対値の 2 乗になる**という大原則に従うこと．
したがって，(1) は $|2\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}|$ を求めるのですが，まずは $|2\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}|^2$ を計算することになります．途中で内積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ の値が必要になりますが，これはすぐにわかります．
(2) も同様．まずは，$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2$ や $|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2$ を計算せねば先に進みません．
(3) も同様．$|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2$ を計算するのですが，内積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ の値が必要になります．これはどのようにして求めるでしょうか．条件の式に手を加える必要がありそうですね．

32 26 をみれば分かるように，ベクトルのなす角を求めるには内積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ の値が必要になります．**なす角を求めるには内積を利用する**しかありません．内積は「内積の値，大きさ，角度の三位一体」であるので，内積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ の値，ベクトルの大きさ $|\overrightarrow{a}|$ と $|\overrightarrow{b}|$ が分かれば，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角の cos が分かるからです．条件式をいじくって，何とか $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ の値を求めてください．
(1)(2) ともに，**ベクトルの絶対値は 2 乗しないと先に進まない，同じベクトルの内積は絶対値の 2 乗になる**という原則に従って計算を進め，なんとか，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$，$|\overrightarrow{a}|$ と $|\overrightarrow{b}|$ の値を導き出してください．

33 **垂直とくれば内積が** 0 というのは常識．これまでの計算方法を使えば問題ないです．

34 まずは，$\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}$ や $\overrightarrow{x}-\overrightarrow{b}$ のベクトルを成分表示しよう．何度も言いますが，**成分表示の平行条件や垂直条件はメチャクチャ楽チン**なのだよ．

35 とりあえず，$\overrightarrow{x}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{y}=\begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}$ とでもおいて，条件を式に表すしかないですね．式に表せれば，あとは何とかなるでしょう．p，q，r，s を求めてください．単なる 4 文字の連立方程式の問題．

36 (1) は「何を今さら」という問題．簡単にクリアしてほしいです．
(2) はベクトルで表現すると $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ を求めよということだから，絶対値は 2 乗して計算を進めれば簡単に分かります．しかし，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ と $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ と，なす角が分かっているのだから，ベクトルなんか使わなくても余弦定理で一発ＯＫですね．

37 こういう問題では，証明すべき目標をはっきりさせることが大切です．$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が垂直であることを示すのだから，当然，内積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$ を示せばよいことになります．あとは条件式を変形して，この目標の式を引っ張り出すだけ．ここでも**ベクトルの絶対値は 2 乗しないと先に進まない**のルールに従おう．

38 まずは，条件式を $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{c}$ についての連立方程式と見ることです．当然，1 文字消去ということで代入していろいろすることになります．
この問題は，**ようわからんが適当に式をいじってたらできてしまった**という典型的な問題．そういう意味では少し意地悪なパズル的問題ですね．条件式をうまく使おう．(1) ができれば，(2) は余裕ですね．

39 これは非常にメンドウな問題です．マジでホンマにメンドウ．できればやりたくないです．
まず，この問題を解くには先ほどの例題 2 と 23 を完璧に理解できている必要があります．例題 2 と 23 では，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が具体的に与えられていたから，何とか計算できましたが，今回の問題は全く具体的に与えられていません．このことはつまり，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のままで計算を進めよということであり，かなりの注意力と計算力が要求されます．したがっ

て，この問題はパス．気が向いたら犬プリで解説しま〜す．

$\boxed{40}$ まずは $x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$ を成分表示しよう．垂直条件と大きさを求めることはこれまでにも何度も出てきているので軽くこなしてほしいところ．

$\boxed{41}$ まずは図示してみて $\overrightarrow{x}$ をイメージしよう．当然 2 つあることが分かります．とりあえず，$\overrightarrow{x}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ とでもおき， 式を立てるしかないね．

$\boxed{42}$ これまでに何度も出てきた 3 原則，**ベクトルの絶対値は 2 乗しないと先に進まない**，**同じベクトルの内積は絶対値の 2 乗になる**，**垂直とくれば内積が 0** を用いれば解ける問題．結果的に，条件の 3 つの式が，$|\overrightarrow{x}|^2$ と $|\overrightarrow{y}|^2$ と $\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}$ についての連立方程式になっていることを意識する必要があります．

$\boxed{43}$ (1) は三角不等式といわれる重要な不等式で，**三角形の 2 辺の和は他の 1 辺より大きい**という感覚的には当たり前なことをいっているだけ．数学 II でも登場しました．この不等式をベクトルを用いて証明せよ，というものですが，かなりメンドウ．不等式の証明方法のルールに従って厳密に証明しよう．そう，厳密に．
(2) は (1) の結果を利用するだけだから簡単ですね．
なお，参考問題として，同じく数学 II で登場した「コーシー・シュヴァルツの不等式」

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq(ax+by)^2$$

をベクトルを用いて証明してみてください．こっちのほうが重要かもね．合わせて犬プリで紹介します．
ヒントは，$\overrightarrow{p}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{q}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とおいて考えると，先ほどの不等式は，

$$|\overrightarrow{p}|^2|\overrightarrow{q}|^2\geqq(\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{q})^2$$

となりますね．この式はほとんど明らかですよね？

$\boxed{44}$ 座標平面上で 3 点の座標が分かっている三角形の面積は，図を描いて考えれば中学生でもできる問題です．しかし，ここではベクトルを利用した方法を学ぼう．まずは上の例題 4 を見よう．できれば「指針」ではなく下の「参考」の解答をマスターしてほしいです．**この公式は証明方法も含めて必ず暗記せねばなりません**．なお，いろいろな三角形の面積の求め方を犬プリでも紹介したので参考にしてください．

☆三角形の面積 (重要) ☆
△ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$$

とベクトルを用いて表される．
特に，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ と，成分表示されている場合は，

$$S=\frac{1}{2}|ad-bc|$$

で求められる．このことは，つまり，3 点 $(0,\ 0)$，$(a,\ b)$，$(c,\ d)$ でできる三角形の面積 S が

$$S=\frac{1}{2}|ad-bc|$$

であることを意味している．

$\boxed{45}$ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{b}$ のとき，△OAB の面積をベクトルを用いて表すと，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2-(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2}$$

となります．つまり，ベクトルの大きさ $|\overrightarrow{a}|$ と $|\overrightarrow{b}|$，それと内積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ の値がわかれば良いのです．$|\overrightarrow{a}|$ と $|\overrightarrow{b}|$ はすでに分かっていますが，内積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ の値はどう求めるのでしょうか．$\boxed{32}$ がヒントになるでしょう．**ベクトルの絶対値は 2 乗しないと先に進まない**のルールに従おう．