第 1 章　平面上のベクトル

第 2 節　ベクトルと平面図形

6　ベクトルと図形

☆この章のポイント☆

①「ベクトル」は図形問題を解くための道具の一つ．そのためには，

・まずは**自分でベクトルを設定**すること（どこを始点におくべきか？）．

・何を示せばよいのか**目標をはっきりさせる**こと．

が重要ポイント．

②3 点が同一直線上にあるための条件をマスターする．

③1 次独立なベクトルの性質

$\boxed{55}$ 3 点 A， B， C が同一直線上にあるとは，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ **を適当に伸ばせば** $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ **になる**ということを意味しています．では，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ **を適当に伸ばせば** $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ **になる**ということを式で表現すれば？

$\boxed{56}$ これも $\boxed{55}$ と同じ手法で解決します．つまり，3 点 P， A， B が同一直線上にあることを示せばよいのです．しかし，少し考えれば，そんなことをするまでもなく，点 P が直線 AB 上にあることがわかるのですが．ヒントは 3 − 2 = 1．なお，点 P が線分 AB をどのように分けている点なのかもついでに考えてください．

$\boxed{57}$ これも $\boxed{55}$ と同じ手法で解決しますが，そんなことをしなくても，中学校レベルの知識でも十分に解決するでしょう．まずは，3 点を A， B， C とでもおいて，いろいろやってみたら．

$\boxed{58}$ $\overrightarrow{0}$ でもなく互いに平行でもない 2 つのベクトルを 1 次独立なベクトルといいます（ただし，この定義は平面ベクトルの場合）．$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ **が 1 次独立のとき，**

$$s\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}=0 \iff s=t=0$$

が成立し，このことから，

$$s\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}=s'\overrightarrow{a}+t'\overrightarrow{b} \iff s=s',\ t=t'$$

が成立します．つまり，**1 次独立なベクトルでは係数比較しても構いません**．だから「1 次独立なので…」という但し書き（おまじない）は必ず必要です．

$\boxed{59}$ ここからしばらく，平面図形の問題が続きます．**図形問題をベクトルで解くことのありがたさを実感してほしいです**．図形問題をベクトルで解く基本は，前にも言ったように ① **まずは自分でベクトルを設定すること**（どこを始点におくべきか？）② **何を示せばよいのか目標をはっきりさせること**，です．
また，**わけのわからんベクトルが出たら，自分にとって都合のよい始点にすりかえる**という基本的かつ重要な方法も当然必要．
この問題の場合，始点をどこにおいてもできるますが，個人的には始点を O におきます．あとは内分点の公式に当てはめるのみ．まずは A_1， B_1 から求めて，次に A_2， B_2 というように，落ち着いて計算していこう．1 : 2 を 2 : 1 と間違えないように．逆にする人が結構多いんだよね．

$\boxed{60}$ 問題文に全くベクトルが顔を出さないが，ベクトルを用いて証明すべきです．① **まずは自分でベクトルを設定すること**（どこを始点におくべきか？）② **何を示せばよいのか目標をはっきりさせること**というポイントは同じ．この問題の場合，3 点が一直線上にあることを示すのだから，$\boxed{55}$ などから，示すべき目標はわかるでしょう．それに向けて証明を進めるだけ．これも始点はどこでも構いません．内分点の公式，外分点の公式を間違えないように．注意深く立式しよう．まあ，メネラウスの定理（の逆）を使えば一瞬で解決ですが，それはセコイです．正々堂々とベクトルで解いてほしい．

$\boxed{61}$ 同様．でも重要なのでもう一度書きます．① **まずは自分でベクトルを設定すること**（どこを始点におくべきか？）② **何を示せばよい**

のか目標をはっきりさせることがポイント．この問題は，平行四辺形だからおのずと始点をどう設定するかは決まってくるでしょう．**ベクトルの和は対角線**という基本も忘れずに．

$\boxed{62}$ 基本かつ超重要問題．授業でも取り上げました．**絶対にマスターせねばならない問題**です．どっかの辺の比を $t:1-t$ とか $s:1-s$ などとおいて $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を 2 通りに表現．そして，おまじないの一言を述べてから係数比較します．ここでもメネラウスの定理を使うのはセコイ．正々堂々とベクトルの王道で解いてほしい．

$\boxed{63}$ (1) は先ほどと同様．どっかの辺の比を $t:1-t$ とか $s:1-s$ などとおいて $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を 2 通りに表現．そして，おまじないの一言を述べてから係数比較します．(2) は，さらにもう 1 か所，辺の比を設定しないといけません．なお，(2) は後ほど学習するベクトル方程式の考えを用いれば，点 Q が直線 AB 上にある条件が簡単にわかるので，ベクトル方程式を学習した後に，もう一度，取り組んでほしいですね．

$\boxed{64}$ まずは，**この問題を見て「ベクトルで解こう！」と感じなければなりません**．その上で，垂直とくれば内積が 0 というように証明すべき目標をベクトルの言葉で言いかえることです．あとは，自分でベクトルを設定し・・・もういちいち言わなくても大丈夫でしょう．

$\boxed{65}$ なかなかな難問．まずは，外心，垂心とはどういう点なのか (どうやって作図するのか) を思い出そう．注意せねばならないのは，**H が垂心であることを示すのが目的であるので，H が垂心であることは証明の最後まで伏せておかねばならない** (つまり最初は H は垂心かどうかわからない) ということ．つまり目標は $\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$， $\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ を示すことで，どちらか一方だけ示せは，あとは「同様にして」で問題ないと思います．次にベクトルをどのように設定するかが最大の問題．始点はどこにおいても構わないので，とりあえずは A を始点におきたくなるのですが・・・$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$， $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とおいても $\vec{b}$ と $\vec{c}$ の間に特に何の関係もないですね (長さも角も不明)．実は，O が外心であることがポイント．だから，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$， $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$， $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ **とおくのがベスト**です．なぜなら長さは等しいし，何よりも $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ が $\vec{a}$， $\vec{b}$， $\vec{c}$ を用いて簡単に表すことができるからです．ヒントは O が外心であること，これに尽きます．たとえば，OM と BC はどのような関係になっているのでしょうか．

$\boxed{66}$ まずは上の例題 6 を熟読しよう．全く同じです．最大のポイントは $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ とおくこと，ていうか，**このようにおけること**です．あとは垂心の性質を考えて，内積計算にもちこみ，s， t を決定するだけです．

$\boxed{67}$ 基本的な考え方は先ほどの問題に同じです．$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくこと，ていうか，**このようにおけること**です．あとは外心の性質を考えて，内積計算にもちこみ，s， t を決定するのです．なお，$\boxed{50}$ で内心，$\boxed{66}$ で垂心，$\boxed{67}$ で外心をベクトルで表すことができました．重心はすでに知っているから，三角形の五心のうち 4 つまでをクリアしたことになります．では残りの 1 つ，傍心は・・・？

興味ある人は考えてみよう．

$\boxed{68}$ う～ん，これは個人的にはベクトルで証明するべきではないと考えます．だから，ベクトルでの証明はやめよう (「ベクトルで証明せよ」とはどこにも書いてないし)．というのも，君たちはこの問題は過去にやっているのです．分野は「図形と方程式」。ヒントは「座標」．**自分の都合の良いように座標を設定してよい**という原則に従い，座標計算で証明するのがベスト．数学 II の教科書 P68 を参照してください．どうしてもベクトルでやりたい人は，上の例題 7 を見て勝手にやっといて

ください．

69 発展問題ですが誘導が丁寧なので（誘導がなければ難しい），その指示にしたがって計算を進めていけばよいです．**わけのわからんベクトルが出たら，自分の都合のよい始点にすりかえる**という手法がここでも役に立ちます．最後の係数比較では，おまじないの一言を忘れずに．なお，本格的な大学入試問題だとこのような誘導は全くないのが普通です．自分で辺の比を設定できなければならないのですが・・・まあ，まだエエでしょう．