積分計算５番勝負

積分の計算では，式の見た目はほぼ同じでも，実際に解いてみると，ずいぶん方法が違うことがよくあります．試合形式で，その違いを味わってみましょう．なぜ，簡単に計算できたのか，なぜ，メンドウなことになったのか，その理由を試合内容を振り返って各自で考察してください．

第１試合	$\displaystyle\int \frac{1}{\tan x}\,dx$	VS	$\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx$
第２試合	$\displaystyle\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx$	VS	$\displaystyle\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$
第３試合	$\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$	VS	$\displaystyle\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx$
第４試合	$\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$	VS	$\displaystyle\int x^2e^x\,dx$
第５試合	$\displaystyle\int (\log x)^3\,dx$	VS	$\displaystyle\int \tan^3 x\,dx$

第１試合 $\displaystyle\int \frac{1}{\tan x}\,dx$ VS $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx$

試合の見どころ

どちらも $\tan x$ と $\sin x$ の逆数形だが，決定的に違うことは，$\dfrac{1}{\tan x}$ が $\dfrac{1}{\tan x}=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ と変形可能であるのに対し $\dfrac{1}{\sin x}$ はこのままでは変形できないということ．このことが試合にどう影響をもたらすのか．

$\displaystyle\int \frac{1}{\tan x}\,dx$ の戦いぶり

解 $\displaystyle\int \frac{1}{\tan x}\,dx=\int \frac{\cos x}{\sin x}dx.$

ここで, $\sin x=t$ とおくと $\cos x\,dx=dt$ より，

$$(\text{与式})=\int \frac{1}{t}\,dt=\log|t|+C=\log|\sin x|+C$$

■

注 $\cos x$ と $\sin x$ が同時に登場したときは一瞬ハラハラしたが，$\cos x$ と dx が合わさって dt になるという絶妙の置換ぶりには感動すら覚える．

$\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx$ の戦いぶり

解

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x}\,dx&=\int \frac{\sin x}{\sin^2 x}dx\\&=\int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dt\end{aligned}$$

$\cos x=t$ とおくと $-\sin x\,dx=dt$ より，

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=\int \frac{1}{t^2-1}\,dt\\&=\int \frac{1}{(t-1)(t+1)}\,dt\\&=\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt\\&=\frac{1}{2}(\log|t-1|-\log|t+1|)\,dt\\&=\frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C\\&=\frac{1}{2}\log\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C\end{aligned}$$

■

注 チカンしようにも相手がいなかったので，分母分子に $\sin x$ をかけて無理やりチカンの相手を作り出すという荒業を見せるが，結果的に部分分数に分けるという手の込んだ試合運びを見せてくれた．善戦はしたが，残念ながら無念の敗退．なお，分母分子に $\cos x$ をかけると，その時点で崩壊し完敗するところであった．どうしてなのかは理解できるであろう．

第 2 試合　$\displaystyle\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$　ＶＳ　$\displaystyle\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$

試合の見どころ

どちらも $\sin x$ と $\cos x$ が複数個ずつかけ合わさった形をしているが，$\displaystyle\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$ が $\sin x$ と $\cos x$ が 2 個ずつなのに対し，$\displaystyle\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$ の方が $\cos x$ が 1 個だけ多くなっている．この 1 個分のズレが試合にどう影響をもたらすのだろうか．次数が高いほうが積分も困難な気がするのだが・・・

$\displaystyle\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$　の戦いぶり

解

$$\begin{aligned}&\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx\\ =&\int \sin^2 x \cos^2 x \cos x \, dx\\ =&\int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x \, dx\end{aligned}$$

ここで，$\sin x = t$ とおくと $\cos x \, dx = dt$ より，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int t^2(1-t^2)\, dt\\ &= \int (t^2 - t^4)\, dt\\ &= \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + C\\ &= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^3 x + C\end{aligned}$$

■

✏注　**第 1 試合**　同様に，1 個余った $\cos x$ が dx と合わさって dt に置き換わっている．結果的に $\cos x$ が 1 個多めにあったことが幸いした．このように **1 個だけ多めにあるというのは置換積分に効果的なようだ**．

$\displaystyle\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$　の戦いぶり

解

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \int (\sin x \cos x)^2 \, dx$$

2 倍角の公式より，$\sin x \cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$ なので，

$$(\text{与式}) = \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x \, dx$$

2 倍角の公式より，$\sin^2 2x = \dfrac{1-\cos 4x}{2}$ なので，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2}\, dx\\ &= \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)\, dx\\ &= \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C\end{aligned}$$

■

✏注　$\sin x$ と $\cos x$ の個数が同じなのも困りものだ．チカンしようにも相手がいない．**第 1 試合** と同じような状況である．こんなときは**次数下げをするしかない**．三角関数の次数下げには 2 倍角の公式（半角の公式）を利用することが多い．結果的に，4 次式を 1 次式にまで下げることができた．そうやら，三角関数の積分計算では倍角公式や半角公式，積和の公式などを完全に頭に入れておく必要がありそうだ．

参考　**第 1 試合**　と　**第 2 試合**　を振り返ってみると，どういう時に $\sin x$ や $\cos x$ をチカンすればよいかわかると思う．例えば，次の 3 つの積分計算

(1) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x(\sin x + 1)}\, dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{1+\sin x}\, dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{1-\sin x}\, dx$

を眺めると，(1) は明らかに $\sin x = t$ とチカンすべきだし，(2) も $\displaystyle\int \frac{2\sin x \cos x}{1+\sin x}\, dx$ と変形できるから，これまた $\sin x = t$ とチカンすべき．**$\cos x$ が分子部分に 1 個だけ多めにあるから**である．その点，(3) はこのままの状態でチカンしても意味がない．**チカンする相手を見つけるために，ある程度手を加えねばならない**．どうすればよいかは各自で考えて欲しい．チカンする相手が出てくるように分母分子に何かをかけるのだが・・・

第 3 試合　$\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$　ＶＳ　$\displaystyle\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx$

試合の見どころ

$\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$ は一瞬で終わる (これは暗記すべき公式だから). 一方の $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx$ だが, $\dfrac{1}{\cos^4 x}$ を, $\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)^2$ と解釈するのではなく, $\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$ と解釈することがポイント. なぜだろうか. それは, $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ がある三角関数と密接な関わりがある (ウラの世界で密通している) ことを察知していなければならない. この試合は情報戦になりそうだ.

$\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$　の戦いぶり

解

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

■

注　置換積分や部分積分など全く関係なし. 単なる公式であった. 意外と見落としてしまうので再確認してほしい. 今大会最短の試合時間であった. 完全試合で何も言うことなし.

$\displaystyle\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx$　の戦いぶり

解

$$\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$
$$= \int (1+\tan^2 x)\frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$

ここで, $\tan x = t$ とおくと $\dfrac{1}{\cos^2 x}dx = dt$ より,

$$(与式) = \int (1+t^2)dt$$
$$= t + \frac{1}{3}t^3 + C$$
$$= \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C$$

■

注　$\dfrac{1}{\cos^2 x}$ と $\tan x$ が非常に相性が良いことを印象付ける試合であった. この 2 つの式はどうやらウラの世界でもつながっていたようだ.

▷Point◁(妖しい関係)

表の世界の関係

$$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

ウラの世界 (微分の世界) の関係

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

この密通関係を知っていれば, $\dfrac{1}{\cos^4 x}$ をどのように解釈するのかがわかると思う.

つまり, $\dfrac{1}{\cos^4 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$ と解釈し, 最初の $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ に表の世界の関係式を, 後半の $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ に表の世界の関係式を, それぞれ当てはめているのである. なんという感動的で完璧なチカンぶりだろうか.

$\dfrac{1}{\cos^2 x}$ と $\tan x$ が表の世界でも裏の世界でも関係があるのは衝撃的だが, このことは積分計算に非常に重要な役割を果たす. 今後, 2 つの親密な関係から目が離せないだろう.

なお, 実に感動的な試合をみせてくれたが, 残念ながら $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$　のあまりにパーフェクトな戦いぶりには及ばず, 無念の敗退.

参考　第 1 試合 から 第 3 試合 までを振り返ると, 三角関数の積分計算には独特の考え方のコツがあるようだ. **公式を完璧に覚えておくことは当然のこととして, それらの特徴や関連性も把握しておく必要がある.** なかなかすぐには身につかないかもしれないが, ただ単に漫然と計算するのではなく, 計算の意味を確認し, 理解しながら解き進めていって欲しい.

第 4 試合　$\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$　ＶＳ　$\displaystyle\int x^2e^x\,dx$

試合の見どころ

パッとみると見間違えるほど形が似ている．ここまで似ていると全くの互角にしか見えないのだが何やら不穏な気配が試合会場を取り巻いている．なんとなく x^2e^x より xe^{x^2} の方が複雑そうな気がするのだが，見た目と計算の難易度は無関係だ．両者の x の次数を意識する必要がある．でも，何をどう意識するのだろうか．まずは試合を見てみよう．

$\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$　の戦いぶり

解　$x^2=t$ とおくと，$2xdx=dt$ より，

$$\begin{aligned}\int xe^{x^2}\,dx &= \int \frac{1}{2}e^{x^2}2x\,dx\\ &= \int \frac{1}{2}e^{t}\,dt\\ &= \frac{1}{2}e^{t}+C\\ &= \frac{1}{2}e^{x^2}+C\end{aligned}$$

注　置換積分を用いることに気づいただろうか．$(e^{f(x)})'=f'(x)e^{f(x)}$ なので，$f'(x)$ の次数が $f(x)$ の次数より 1 小さいことを意識すれば xe^{x^2} が $(1\text{次式})e^{(2\text{次式})}$ の形なので，置換積分でうまくいくのは当然なのである．

$\displaystyle\int x^2e^x\,dx$　の戦いぶり

解

$$\begin{aligned}\int x^2e^x\,dx &= \int x^2(e^x)'\,dx\\ &= x^2e^x-\int (x^2)'\cdot e^x\,dx\\ &= x^2e^x-\int 2xe^x\,dx\\ &= x^2e^x-2\int x(e^x)'\,dx\\ &= x^2e^x-2\left(xe^x-\int x'e^x\,dx\right)\\ &= x^2e^x-2\left(xe^x-\int e^x\,dx\right)\\ &= x^2e^x-2(xe^x-e^x)+C\\ &= (x^2-2x+2)e^x+C\end{aligned}$$

注　今度は置換積分では不可能なので，部分積分，それも 2 回もやる羽目になってしまった．符号をかなり意識しないと，ミスする可能性大である．それにしても「置換積分」と「部分積分」のどちらを用いるのか，どう区別するのか，については明確な答えはない．今回のように次数に注目することは一つの判断材料になるが，正直，やってみないとわからない．よく「部分積分と置換積分のどちらをやればよいですか？」という質問をうけるが，それに対する僕の解答は「**置換積分でうまくいかなければ部分積分で，部分積分でうまくいかなければ置換積分でやればよいだけ**」．つまり，手法としては 2 択しかないから，あれこれ悩むよりはとにかくどちらかの方法を試してみて，無理なら方針転換するのが良いだろう．

どう考えても $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$ の方に軍配があがるのだが，$\displaystyle\int x^2e^x\,dx$ サイドから次のようなメッセージが届いた．

> $\displaystyle\int x^2e^x\,dx$ を部分積分せずに，もっと簡単に計算する方法があるので，この手法で勝負がしたい．

「**部分積分せずに答えがわかる**」とは魅惑的ではないか．早速，お手並みを拝見するとしよう．

どうやら次の有名事実を用いるらしい．

▷Point◁

$(n\text{次式})e^{ax}$ は微分しても積分しても
$(n\text{次式})e^{ax}$ である．
特に，$a=1$ の場合は n 次の係数すらも変わらない．

具体例で考えてみよう．

例えば，$f(x)=(3x^2+2x+1)e^x$ の場合，微

分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= (6x+2)e^x + (3x^2+2x+1)e^x \\ &= (3x^2+8x+3)e^x \end{aligned}$$

確かに同じ 2 次式で x^2 の係数も変わらない．

一般に，$y = f(x)e^{ax}$ を考えると，

$$y' = f'(x)e^{ax} + f(x)ae^{ax} = (af(x)+f'(x))e^{ax}$$

$f'(x)$ の次数は $f(x)$ の次数より小さいので，$f(x)$ と $af(x) + f'(x)$ の次数は一致する．$a = 1$ なら $f(x)$ の最高次の係数も一致する．

積分の場合も同様なのだが，証明はちょっと難しいので省略する．なんとなく分かると思う．

この事実を利用すると，$\displaystyle\int x^2e^x\,dx$ は次のように計算することができる．

解　x^2e^x は (2 次式) × e^x なので，

$$\int x^2e^x\,dx = (x^2+px+q)e^x + C$$

とおくことができる．両辺を微分して，

$$\begin{aligned} x^2e^x &= \{(x^2+px+q)e^x\}' \\ x^2e^x &= (2x+p)e^x + (x^2+px+q)e^x \\ x^2e^x &= (x^2+(p+2)x+p+q)e^x \end{aligned}$$

2 次式部分の係数を比較して

$$p+2 = 0, \qquad p+q = 0$$

よって，$p = -2$，$q = 2$ なので，

$$\int x^2e^x\,dx = (x^2-2x+2)e^x + C$$

■

✎**注**　最初から積分の結果の式を想定して，恒等式的発想に持ち込むとは驚いた．確かに，この方法は圧倒的に早く正確にできる．すごい．他の関数にも応用できそうだ．

【例】　$\displaystyle\int (6x^2-4x+3)e^{2x}\,dx$

考え方　部分積分 2 回タイプだが，かなり計算がメンドウになるので，先ほどの手法を用いる．今度は (2 次式)e^{2x} なので x^2 **の係数も変化する**ことに注意しよう．

解

$$\int (6x^2-4x-3)e^{2x}\,dx = (px^2+qx+r)e^{2x} + C$$

とおくことができる．両辺を x で微分して，

$$(6x^2-4x-3)e^{2x} = (2px+q)e^{2x} + (px^2+qx+r)2e^{2x}$$

$$(6x^2-4x-3)e^{2x} = (2px^2+(2p+2q)x+q+2r)e^{2x}$$

2 次式部分の係数を比較して

$$2p = 6, \qquad 2p+2q = -4, \qquad q+2r = -3$$

よって，$p = 3$，$q = -5$，$r = 1$ なので，

$$\int (6x^2-4x-3)e^{2x}\,dx = (3x^2-5x+1)e^{2x} + C$$

■

お～っと，ここで別の積分 $\boxed{\displaystyle\int e^{x^2}\,dx}$ が乱入してきた！！！！！

$\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$ と試合をさせろと言っている．急遽，次の試合を行うことになった．

特別試合　$\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$　　ＶＳ　　$\displaystyle\int e^{x^2}\,dx$

試合の見どころ

突然実現したスペシャルマッチ．e^{x^2} は共通で，前に x がついているか，いないかの違いしかない．これまでの経験から形のシンプルさと計算のしやすさは全く関係がないことがわかっているが，今回はどうだろうか．実は驚くような試合結果となった．

$\displaystyle\int e^{x^2}\,dx$　の戦いぶり

実は，この積分は**高校段階では計算不可能**である．

よって，これ以上の試合続行が不可能のため，$\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$ の不戦勝となった．ああ，無念．

第 5 試合　$\displaystyle\int (\log x)^3\,dx$　　V S　　$\displaystyle\int \tan^3 x\,dx$

試合の見どころ　対数関数と三角関数の異種格闘技戦．しかも，どちらも 3 乗で次数的には全くの互角．どのような戦いになるのか楽しみだ．

$\displaystyle\int (\log x)^3\,dx$　の戦いぶり

解

$$
\begin{aligned}
&\int (\log x)^3\,dx\\
=&\int x'(\log x)^3\,dx\\
=&x(\log x)^3-\int x\{(\log x)^3\}'\,dx\\
=&x(\log x)^3-\int x\cdot 3(\log x)^2\frac{1}{x}\,dx\\
=&x(\log x)^3-3\int (\log x)^2\,dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int (\log x)^2\,dx\\
=&\int x'(\log x)^2\,dx\\
=&x(\log x)^2-\int x\{(\log x)^2\}'\,dx\\
=&x(\log x)^2-\int x\cdot 2(\log x)\frac{1}{x}\,dx\\
=&x(\log x)^2-2\int \log x\,dx\\
=&x(\log x)^2-2(x\log x-x)+C
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
&\int (\log x)^3\,dx\\
=&x(\log x)^3-3\{x(\log x)^2-2(x\log x-x)\}+C\\
=&x(\log x)^3-3x(\log x)^2+6x\log x-6x+C
\end{aligned}
$$

■

注　$\displaystyle\int \log x\,dx=x\log x-x$ は公式として利用したものの，実質まさかの部分積分 3 回！キツイ計算だが，残念ながら，こうするしかないようだ．

$\displaystyle\int \tan^3 x\,dx$　の戦いぶり

解

$$
\begin{aligned}
&\int \tan^3 x\,dx\\
=&\int \tan x\cdot\tan^2 x\,dx\\
=&\int \tan x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\,dx\\
=&\int \tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx-\int \tan x\,dx
\end{aligned}
$$

$\displaystyle\int \tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx$ について．

$\tan x=t$ とおくと $\dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx=dt$ より，

$$
\begin{aligned}
\int \tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx&=\int t\,dt\\
&=\frac{1}{2}t^2+C\\
&=\frac{1}{2}\tan^2 x+C
\end{aligned}
$$

$\displaystyle\int \tan x\,dx$ について，

$\cos x=t$ とおくと $-\sin x\,dx=dt$ より，

$$
\begin{aligned}
\int \tan x\,dx&=\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx\\
&=-\int \frac{1}{t}\,dt\\
&=-\log|t|+C\\
&=-\log|\cos x|+C
\end{aligned}
$$

したがって，以上より求める定積分は，

$$
(\text{与式})=\frac{1}{2}\tan^2 x-\log|\cos x|+C
$$

■

注　これもかなりキツイ．$\dfrac{1}{\cos^2 x}$ と $\tan x$ が非常に相性が良いことを利用するという手法を用いるのだが，なかなかヤッカイな計算だ．

今回の対戦は，これまでの練習成果の全てを出すといっても過言ではない．よって，両者引き分けとする．