バウムクーヘン分割なんてやめようよ

どーゆーいみ？？

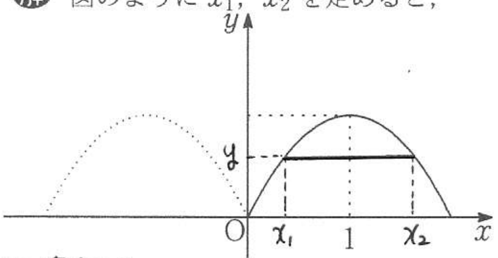
y 軸の周りの回転体の体積を求める問題はなかなか大変ですね．まずは，下の 2 問を考えてみよう．

例題 1

曲線 $y=2x-x^2$ と x 軸で囲まれた図形を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

考え方　回転体の体積を求める基本は「回転軸に垂直に切った断面を寄せ集める」ことです．本問の場合，y 軸に垂直に切ると断面はドーナツ状の円板になります．

解　図のように x_1，x_2 を定めると，



xをyで表すためにxの2次方程式を解きます

$$y=2x-x^2 \iff x^2-2x+y=0$$
$$\iff x=1\pm\sqrt{1-y}$$

より，

フムフム

$$x_1=1-\sqrt{1-y},\quad x_2=1+\sqrt{1-y}$$

したがって，求める体積 V は

$$\begin{aligned}
V&=\pi\int_0^1 {x_2}^2\,dy-\pi\int_0^1 {x_1}^2\,dy\cdots①\\
&=\pi\int_0^1 ({x_2}^2-{x_1}^2)\,dy\\
&=\pi\int_0^1 (x_2+x_1)(x_2-x_1)\,dy\\
&=\pi\int_0^1 4\sqrt{1-y}\,dy\\
&=\pi\left[4\left(-\frac{2}{3}(1-y)^{\frac{3}{2}}\right)\right]_0^1\\
&=\frac{8\pi}{3}
\end{aligned}$$

この変形はなかなか上手いね

■

注　y 軸に垂直に切断すると交点が 2 個できるので 2 つの関数（$x_1=1-\sqrt{1-y}$ と $x_2=1+\sqrt{1-y}$）を考えましたが，それほど大変な計算ではありません．

うん　これならできそう…

例題 2

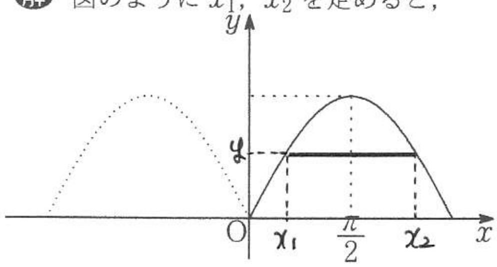
曲線 $y=\sin x$　$(0\leqq x\leqq\pi)$ と x 軸で囲まれた図形を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

考え方　基本方針は先ほどの **例題 1** と同じです（グラフの形も似ています）．しかし，今回の場合は $y=\sin x$ の式から $x=(y\text{の式})$ への変形がムリなので計算上すこし工夫する必要があります．

解　図のように x_1，x_2 を定めると，

こまる～

形は似てるのに…



したがって，求める体積 V は

$$\begin{aligned}
V&=\pi\int_0^1 {x_2}^2\,\underline{\underline{dy}}-\pi\int_0^1 {x_1}^2\,\underline{\underline{dy}}\\
&=\pi\int_\pi^{\frac{\pi}{2}} x^2\frac{dy}{dx}\,dx-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\frac{dy}{dx}\,dx\\
&=\pi\int_\pi^{\frac{\pi}{2}} x^2\frac{dy}{dx}\,dx+\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 x^2\frac{dy}{dx}\,dx\\
&=\pi\int_\pi^0 x^2\frac{dy}{dx}\,dx\\
&=\pi\int_\pi^0 x^2\cos x\,dx\\
&=\pi\int_\pi^0 x^2(\sin x)'\,dx\\
&=\pi\left\{\Big[x^2\sin x\Big]_\pi^0-\int_\pi^0 2x\sin x\,dx\right\}\\
&=2\pi\int_0^\pi x\sin x\,dx\cdots\cdots①\\
&=2\pi\int_0^\pi x(-\cos x)'\,dx\\
&=2\pi\left\{\Big[-x\cos x\Big]_0^\pi+\int_0^\pi \cos x\,dx\right\}\\
&=2\pi^2
\end{aligned}$$

置換積分

積分区間に注意しよう

← 2つの積分が1つにつながりました！！

スゴっ

部分積分2連発！！

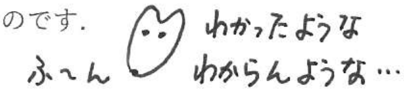
■

あ～しんどかった…

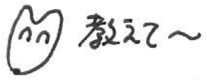
✎注 $\boxed{例題}$ 2 について

$$V=\pi\int_0^1 {x_2}^2\,dy-\pi\int_0^1 {x_1}^2\,dy$$
$$=\pi\int_\pi^{\frac{\pi}{2}} x^2\frac{dy}{dx}\,dx-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\frac{dy}{dx}\,dx$$

の部分が分かりにくいかもしれません．「最初は，x_1，x_2 と区別しているのに，なんで次の式では"x"というように同じになってるんですか」という質問をよくうけます．$y=\sin x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ という関係式において，y は x の関数ですが，x は y の関数ではありません（y が 1 つ決まると x が 2 つ決まるから）．最初の式は $y=\sin x$ を y の関数と見て積分しているから，区別して書いてありますが，続く式では，$y=\sin x$ を x の関数として積分しているから区別する必要はないのです．



このように，y 軸まわりの回転体の体積を求める場合は，$y=$（x の式）から $x=$（y の式）に変形できるかどうかが計算のキツサに影響してきます．しかし，変形できようとできまいと次の公式を利用すれば一発で体積を求めることができます．

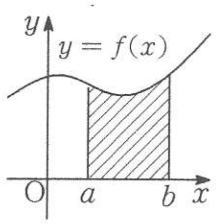


▷Point◁（バウムクーヘン分割）

図の斜線部分を y 軸の周りに回転してできる立体の体積 V は

$$V=\int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$

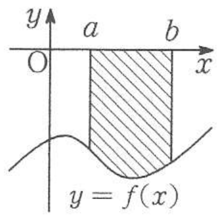
である．



✎注 x 軸とで囲まれた部分が x 軸よりも下部にある場合は，

$$V=\int_a^b 2\pi x\{-f(x)\}\,dx$$
$$=-\int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$

となります．



したがって，上部の場合も下部の場合もまとめて

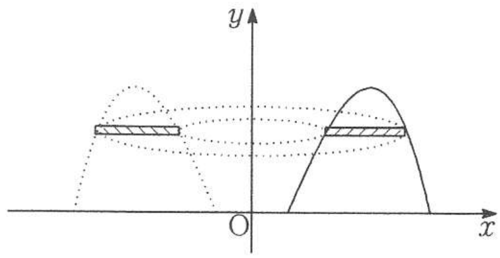
$$V=\int_a^b 2\pi x|f(x)|\,dx$$

とする場合もあります．

これまで，回転体の体積を求めるには「回転軸に垂直に切った断面を寄せ集める」が大原則でした．

$\boxed{従来の考え方}$

y 軸に垂直な方向での断面を考える．図の微小長方形を y 軸の周りに回転させるとドーナツ状の円板ができ，それを寄せ集める．



バウムクーヘン分割では，$f=f(x)$ を x 軸に垂直に切った断片を y 軸周りに回転して考えます．

$\boxed{バウムクーヘン分割の考え方}$

図の微小部分を y 軸の周りに回転させると筒のような立体ができ，それを寄せ集める．

✎注 この筒のような立体が，バウムクーヘンの薄皮 1 枚に似ているので「バウムクーヘン分割」と呼ばれています（別に「トイレットペーパー分割」でもいいんだけど・・・）．