直感的な証明

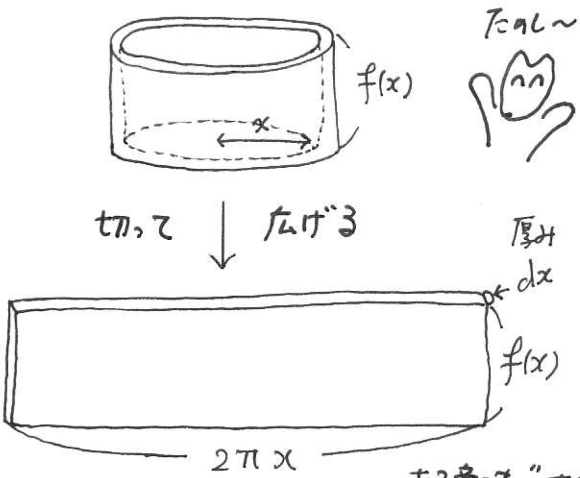
横 dx，縦 $f(x)$ の微小長方形を y 軸周りに回転してできるバウムクーヘンの薄皮1枚分の立体を切って広げると，図のような薄い板になる．

この立体の体積は $2\pi x \times f(x) \times dx$

したがって，求める立体の体積は，微小体積 $2\pi x f(x)dx$ を $x=a$ から $x=b$ まで寄せ集めたものだから

$$V=\int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$

■



ある意味"直方体"なわけやから、体積は3辺をかけて $2\pi x \times f(x) \times dx$ となりますね

最初に紹介した2つの **例題** をバウムクーヘン分割の考え方を用いて計算してみよう．

例題 1（バウムクーヘン分割）

求める体積 V は

$$\begin{aligned}V&=\int_0^2 2\pi x(2x-x^2)\,dx\\&=2\pi\int_0^2(-x^3+2x^2)\,dx\\&=2\pi\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^2\\&=\frac{8\pi}{3}\end{aligned}$$

むっちゃ楽やん

スゲ〜

■

例題 2（バウムクーヘン分割）

求める体積 V は

$$\begin{aligned}V&=\int_0^\pi 2\pi x\sin x\,dx \quad \cdots\cdots ②\\&=2\pi\int_0^\pi x(-\cos x)'\,dx\\&=2\pi\left\{\Big[-x\cos x\Big]_0^\pi+\int_0^\pi \cos x\,dx\right\}\\&=2\pi^2\end{aligned}$$

あの苦労は一体…感動したよ

■

確かに，最初の **解** と比べてみれば「バウムクーヘン分割」の方が圧倒的に速く簡単に計算できることがわかります．しかし，ここで必ず「入試で使っても構わないんですか？」という質問がありますが，一番最初に紹介した **例題 2** の **解** の式①をみてください．この式って**「バウムクーヘン分割」の公式そのもの**です．**「バウムクーヘン分割」解答の式②と全く同じ**ではないですか！！

つまり，

「バウムクーヘン分割」とは，従来の計算方法を
置換積分と部分積分を用いて式変形しただけに過ぎない!!

なーんや それだけのことか…

だから，そんなに大騒ぎする必要ないのです．「バウムクーヘン分割ってスゴいやろ」と自慢気に言う人がいますが，僕に言わせれば大した話ではありません．みんな騒ぎすぎです．

ですから，「いきなり公式を使ってよいのか」とか「どこまで証明を書くべきか」とイロイロ悩むぐらいなら，セオリー通りに従来の方法で計算を始めて，式変形をして「バウムクーヘン分割」の形に持ち込めば良いだけの話です．そうすれば全く問題ありません．

⇨注 あっ，そうそう，くれぐれも「バウムクーヘン分割より・・・」と書いてはいけませんよ．これは俗称であって，公用語ではありませんから．

参考までに，従来の方法が「バームクーヘン分割」と全く同じであることを一般的に証明しておきます．なお，区間 $a<x<b$ で単調増加の場合を考えます．単調減少の場合も全く同じです．

一般的な証明　右下図の，斜線部分を y 軸の周りに回転してできる立体の体積 V は，

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^{f(a)}(b^2-a^2)\,dy+\pi\int_{f(a)}^{f(b)}(b^2-x^2)\,dy \\ &= \pi(b^2-a^2)f(a)+\pi b^2(f(b)-f(a))-\pi\int_{f(a)}^{f(b)}x^2\,dy \\ &= \pi(b^2f(b)-a^2f(a))-\underline{\pi\int_{f(a)}^{f(b)}x^2\,dy} \quad \cdots① \end{aligned}$$

← これまで通り y軸に垂直な断面を考えるので 2つの部分に分けて足しています。

OKよ

ここに注目!!

ここで，① の下線部分は

$$\begin{aligned} &\pi\int_{f(a)}^{f(b)}x^2\,dy \\ =&\pi\int_a^b x^2\frac{dy}{dx}\,dx \\ =&\pi\int_a^b x^2y'\,dx \\ =&\pi\left\{\Big[\,x^2y\,\Big]_a^b-\int_a^b 2xy\,dx\right\} \\ =&\pi(b^2f(b)-a^2f(a))-\int_a^b 2\pi xy\,dx \quad \cdots② \end{aligned}$$

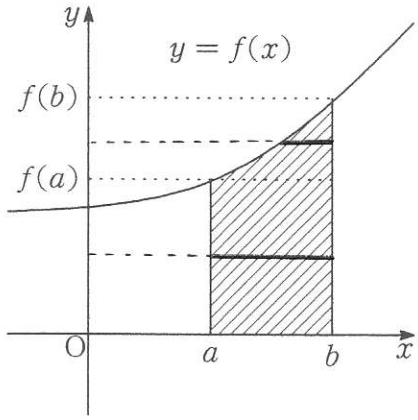
したがって，② を ① の下線部分に代入して，

$$V=\int_a^b 2\pi xf(x)\,dx$$

ヤッホ〜イ

でてきた〜

■



これで，従来の方法と「バウムクーヘン分割」が全く同じことであることが示せました．この証明を書けば完璧でしょう．絶対安心です．でも，これをするくらいなら普通に計算したほうが早いかもね．あとは各自の判断に任せます．

参考 天下の東京大学で「バウムクーヘン分割」が証明つきでそのまま出題されました．このことからもわかるように，やはり証明抜きでそのまま用いるのは避けたほうがよいでしょう．

東京大学入試問題 (1989 年理系第 5 問)
$f(x)=\pi x^2\sin\pi x^2$ とする．$y=f(x)$ のグラフの $0\leqq x\leqq 1$ の部分と x 軸とで囲まれた図形を y 軸のまわりに回転させてできる立体の体積 V は

$$V=2\pi\int_0^1 xf(x)\,dx$$

で与えられることを示し，この値を求めよ．

さすが トーダイ．証明してから使わせるとは…

どの程度まで証明を書けばよいのか迷うところです．この入試問題が出題された当時は「バウムクーヘン分割」は有名な解法ではなかったという時代背景を考えると (本問が受験テクニックとしての「バウムクーヘン分割」を導入する先駆けとなった)，先ほどの 直感的な証明 でも構わないかもしれません．

しかし，「バウムクーヘン分割」そのものが有名になってしまった現在では 直感的な証明 では少し荒っぽい気がします．必ずしも満点を得られるとは限りません．減点されても文句はいえないでしょう． 一般的な証明 で紹介したように置換積分と部分積分に持ち込むのが良いかと思います．でも，試験時間と他の問題とのバランスを考えて，多少減点されるのを覚悟の上で， 直感的な証明 で処理してしまうという判断もまた正しいかもしれません．

まっ，僕は「そこまでして『バームクーヘン分割』に拘らなくてもエエんとちゃうの？」とも思いますけどね．