良い勉強になる不定積分

たくさんやるのは
大変やから
ポイントしぼって
やりたいなあ

次に紹介する不定積分は，とても良い勉強になるでしょう．目がチカチカしそうですけど．

1　$\sin x$ と $\cos x$ の場合

2倍角，3倍角の公式は
完ペキにおぼえとかなあかんで

はーい

(1) $\displaystyle\int \sin x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx$　　(4) $\displaystyle\int \sin^4 x\,dx$

$\boxed{\text{考え方}}$ 『次数を下げる』ことがポイントです．三角関数の次数下げには 2 倍角の公式や 3 倍角の公式が大活躍します．うるおぼえの人はラストチャンスだと思って，しっかりと憶えてください．

ドキっ

解

(1) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

(2) 2 倍角の公式 $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ より，$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$．よって，

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\,dx &= \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx\\ &= \int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx\\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C\end{aligned}$$

サンシャイン
引いて
夜風が
身にしみる…

ひ～　さむい～

(3) 3 倍角の公式 $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ より，$\sin^3 x = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$．よって，

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\,dx &= \int \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}\,dx\\ &= \int\left(\frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x\right)dx\\ &= -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x + C\end{aligned}$$

■

(3) は次のようにも計算できます．こちらの方法の方が簡単かもしれませんね．

（別解）

$\cos x = t$ とおくと，$-\sin x\,dx = dt$ なので，

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\,dx &= \int \sin^2 x\cdot\sin x\,dx\\ &= \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx\\ &= \int (1-t^2)(-dt)\\ &= \int (t^2-1)\,dt\\ &= \frac{1}{3}t^3 - t + C\\ &= \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C\end{aligned}$$

➾**注**　この別解を紹介すると，「さっきと答えが違うやんか」と質問に来る人がありますが，3 倍角の公式を代入すれば同じ式であることが確かめられます（積分定数は省略してます）．

$$\begin{aligned}&-\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x\\ =&-\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}(-3\cos x + 4\cos^3 x)\\ =&-\frac{3}{4}\cos x - \frac{1}{4}\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\\ =&\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x\end{aligned}$$

このように，不定積分の場合は結果が必ずしも一致しない場合があるので注意しよう．最終目標である面積や体積の計算（つまり，定積分の計算）では，不定積分の結果が違っても同じ答えになるので，あんまり心配しなくて構いません．

(4)

2倍角の公式を2回使って
4次式→2次式→1次式と
次数がだんだん下がっている
ことを
意識しよう

$$\begin{aligned}&\int \underbrace{\sin^4 x}_{4次式}\,dx\\ =&\int (\sin^2 x)^2\,dx\\ =&\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2dx\\ =&\int\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\underbrace{\cos^2 2x}_{2次式}\right)dx\\ =&\int\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cdot\underbrace{\frac{1+\cos 4x}{2}}_{1次式}\right)dx\\ =&\int\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cos 4x\right)dx\\ =&\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C\end{aligned}$$

やってることは
単純作業

➾**注**　2 倍角の公式を 2 回使っています．後半の方は，

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ より

$\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$．

ここで，$\theta = 2x$ とした，$\cos^2 2x = \dfrac{1+\cos 4x}{2}$ を用いています．

(1) $\displaystyle\int \cos x\,dx$　(2) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$　(3) $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx$　(4) $\displaystyle\int \cos^4 x\,dx$

考え方　$\cos x$ の場合も，先ほどの $\sin x$ の場合と全く同じです．$\sin x$ も $\cos x$ も三角関数的には同レベルである，という感覚がありますね．

解

(1) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

(2) 2倍角の公式 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ より，$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$．よって，

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x\,dx &= \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx\\ &= \int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx\\ &= \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x + C\end{aligned}$$

(3) 3倍角の公式 $\cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$ より，$\cos^3 x = \dfrac{3\cos x + \cos 3x}{4}$．よって，

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\,dx &= \int \frac{3\cos x+\cos 3x}{4}\,dx\\ &= \int\left(\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x\right)dx\\ &= \frac{3}{4}\sin x+\frac{1}{12}\sin 3x + C\end{aligned}$$

■

(3) は次のようにも計算できます．こちらの方法の方が簡単かもしれませんね．

(別解)

$\sin x = t$ とおくと，$\cos x\,dx = dt$ なので，

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\,dx &= \int \cos^2 x\cdot\cos x\,dx\\ &= \int (1-\sin^2 x)\cos x\,dx\\ &= \int (1-t^2)\,dt\\ &= -\frac{1}{3}t^3 + t + C\\ &= -\frac{1}{3}\sin^3 x + \sin x + C\end{aligned}$$

注　この別解を紹介すると，「さっきと答えが違うやんか」と質問に来る人がありますが，3倍角の公式を代入すれば同じ式であることが確かめられます(積分定数は省略してます)．

$$\begin{aligned}&\frac{3}{4}\sin x+\frac{1}{12}\sin 3x\\ &=\frac{3}{4}\sin x+\frac{1}{12}(3\sin x - 4\sin^3 x)\\ &=\frac{3}{4}\sin x+\frac{1}{4}\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x\\ &=-\frac{1}{3}\sin^3 x+\sin x\end{aligned}$$

このように，不定積分の場合は結果が必ずしも一致しない場合があるので注意しよう．最終目標である面積や体積の計算(つまり，定積分の計算)では，不定積分の結果が違っても同じ答えになるので，あんまり心配しなくて構いません．

(4)

4次式

sin⁴xの積分と全く同じ考え方です。
(4次式→2次式→1次式)

$$\begin{aligned}&\int \cos^4 x\,dx\\ &=\int (\cos^2 x)^2\,dx\\ &=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx\\ &=\int\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cos^2 2x\right)dx\\ &=\int\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cdot\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx\\ &=\int\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cos 4x\right)dx\\ &=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x + C\end{aligned}$$

2次式

1次式

やっぱり単純作業．つまんねー

注　2倍角の公式を2回使っています．後半の方は，

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ より
$\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$．

ここで，$\theta = 2x$ とした，$\cos^2 2x = \dfrac{1+\cos 4x}{2}$ を用いています．

$\sin x$ と $\cos x$ の1乗から4乗までの不定積分が完了しました．5乗，6乗，… と，もっと続けてもいいんですが，単なる嫌がらせみたいなんで止めます．気になる人は自分で考察して，一般的な公式でも作ってください(できたら僕に教えてください)．

で，次はいよいよ $\tan x$ について考えていきましょう．

tanxの場合も
同じようなもんでしょ…ちがうの？