2　$\tan x$ の場合

実におもしろい
まさにパズルの世界です

今度は $\tan x$ です.「な〜んだ, $\sin x$ や $\cos x$ の場合と同じようなもんでしょ」と思ったあなた. 全然違います. $\tan x$ は全くの別世界です. 驚きです.

マジっすか?

(1) $\displaystyle\int \tan x\,dx$　(2) $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$　(3) $\displaystyle\int \tan^3 x\,dx$　(4) $\displaystyle\int \tan^4 x\,dx$

考え方　$\tan x$ の積分のポイントは

重要な☆考え方です☆

☆ $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ と $\tan x$ は非常に相性が良い ☆

ということです. なぜなら次の関係が成り立つからです.

▷Point◁($\dfrac{1}{\cos^2 x}$ の $\tan x$ 関係)

フツーの関係　$1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

ビブンの関係　$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

ほんまに親しい関係なんやなー

仲良し♡

つまり, 通常の式変形だけでなく, 微分の世界でも関係があるのですこの2重の意味での関係性をうまく利用して計算を進めていきます.

解

(1) これは置換積分の代表例.　これは定番!!

$\cos x=t$ とおくと, $-\sin x\,dx=dt$ より,

$$\begin{aligned}\int \tan x\,dx&=\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx\\&=-\int \frac{1}{t}\,dt\\&=-\log|t|+C\\&=-\log|\cos x|+C\end{aligned}$$

(2) 置換積分や部分積分とは全く関係のない単なる式変形でできます.

これはスゴい!! おもろい〜

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x\,dx&=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx\\&=\tan x-x+C\end{aligned}$$

(3) $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ の $\tan x$ 絶妙な関係を使います.

$$\begin{aligned}&\int \tan^3 x\,dx\\=&\int \tan x\cdot\tan^2 x\,dx\\=&\int \tan x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx\\=&\int \tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx-\int \tan x\,dx\end{aligned}$$

実にうまい変形!!

なかなか思いつかんけど感動した!!

$\displaystyle\int \tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx$ について.

$\tan x=t$ とおくと $\dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx=dt$ より,

$$\begin{aligned}\int \tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx&=\int t\,dt\\&=\frac{1}{2}t^2+C\\&=\frac{1}{2}\tan^2 x+C\end{aligned}$$

$\displaystyle\int \tan x\,dx$ については先ほどの結果を利用すればよい.

したがって, 以上より求める定積分は,

$$(\text{与式})=\frac{1}{2}\tan^2 x-\log|\cos x|+C$$

(4) (3)に同じく, $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ の $\tan x$ 絶妙な関係を使います.

$$\begin{aligned}&\int \tan^4 x\,dx\\=&\int \tan^2 x\cdot\tan^2 x\,dx\\=&\int \tan^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx\\=&\int \tan^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx-\int \tan^2 x\,dx\end{aligned}$$

この分解がポイント

さっきと似てるね

$\displaystyle\int \tan^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx$ について.

$\tan x = t$ とおくと $\dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx = dt$ より，

$$\int \tan^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int t^2\,dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}\tan^3 x + C$$

$\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$ については先ほどの結果を利用すればよい．

したがって，以上より求める定積分は，

$$(与式) = \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C$$

これは
ずだすぎるわ
もう、ねます…

このように，$\tan x$ の1乗から4乗までの不定積分は，ややマニアックですが大切な考え方を含んでいるので，「こんなの思いつかねえよな」と愚痴をこぼしながらで構わないので，しっかりと理解しといてください．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \frac{1}{\tan x}\,dx$

いずれも単なる逆数形ですが，決定的に違うことは，$\dfrac{1}{\tan x}$ が $\dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ と変形可能であるのに対し $\dfrac{1}{\sin x}$ や $\dfrac{1}{\cos x}$ はこのままではどうすることもできないということです．

フムフム

じゃあ，何とかしましょう．分母分子に何かをかけます．

解

(1) 分母分子に $\sin x$ をかけます．

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dt$$

$\cos x = t$ とおくと $-\sin x\,dx = dt$ より，

部分分数に
分解します

$$\begin{aligned}(与式) &= \int \frac{1}{t^2-1}\,dt \\ &= \int \frac{1}{(t-1)(t+1)}\,dt \\ &= \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt \\ &= \frac{1}{2}(\log|t-1| - \log|t+1|)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C \\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C\end{aligned}$$

注　置換した後で，部分分数に分けています．かなり手間のかかる不定積分です．

(2) 分母分子に $\cos x$ をかけます．

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dt$$

$\sin x = t$ とおくと $\cos x\,dx = dt$ より，

またまた
部分分数に
分解します

符号に注意しよう

さっきと
ちがうで

$$\begin{aligned}(与式) &= \int \frac{1}{1-t^2}\,dt \\ &= \int \frac{1}{(1-t)(1+t)}\,dt \\ &= \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)dt \\ &= \frac{1}{2}(-\log|1-t| + \log|1+t|)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C \\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C\end{aligned}$$

注　置換した後で，部分分数に分けています．かなり手間のかかる不定積分です．

(3) (1)と(2)がかなりメンドウだったので，今回も・・・とビビッてしまいますが，そんなことは全くありません．置換積分一発で終了．

$$\int \frac{1}{\tan x}\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx.$$

ここで，$\sin x = t$ とおくと $\cos x\,dx = dt$ より，

最後の問題やのに
あけなかったな

$$\int \frac{1}{\tan x}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| + C = \log|\sin x| + C$$

びびって
損したわ

注　今回は省略しましたが，$\dfrac{1}{\sin^2 x}$，$\dfrac{1}{\cos^2 x}$，$\dfrac{1}{\tan^2 x}$ の不定積分も各自でやっといてください．

はーい
やりませーん ←ダメ