微分方程式は大らかな気持ちで

あまり
細かいことは
気にしなーい

y を x の関数とするとき，x と y と y' などが入り混じった式を微分方程式といいます．自然科学や社会科学における様々な現象，例えば，惑星や人工衛星の軌道，人口や株価の変動，考古学における年代測定，薬の効き目から，伝染病の広がる速さまで，すべて微分方程式が関係しています．微分方程式なしでは世の中のことが何もわからないといっても過言ではありません．それくらい微分方程式は我々のごく身近なところに潜んでいるのです．

フ〜ン

微分方程式には様々なパターンがあるのですが，高校で扱う微分方程式はたった1種類だけです．なので，そんなにビビる必要はありません．あまり細かいことは気にせず大らかな気持ちで臨もう．

なお，「微分方程式を解く」とは「y を求める」つまり「y を x で表す」ということです．

1　変数分離形微分方程式

微分方程式を y' について解いたときに，x だけの式と y だけの式の積で表されるもの，すなわち

$$y' = f(x)g(y)$$

の形の微分方程式を「変数分離形」と言います．高校で扱うのはこの形だけです．

▷Point◁

変数分離形微分方程式 $y' = f(x)g(y)$ の解法

step ① まずは y' を $\dfrac{dy}{dx}$ と書き直す．

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

step ② $\dfrac{dy}{dx}$ を，あたかも分数式のように見なして，dx と dy をバラバラにし，x がらみ，y がらみを両辺に振り分ける．

$$\frac{1}{g(y)}\,dy = f(x)\,dx$$

step ③ あとは両辺に $\int$ をくっつけて機械的に計算していく．

とにかく具体的な微分方程式を解いてみよう．

例題 1. 次の微分方程式を解け．

(1) $y' = 2xy$

(2) $yy' = 1 - x$

(3) $xy' + 1 = y$

考え方 (1) はすでに「変数分離形」になっていますが，(2)(3) では，まずは $y' =$ の直して「変数分離形」になっているかどうか考えます．

解 (1) $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$ より，$\dfrac{1}{y}\,dy = 2x\,dx$

この形にする!!

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int 2x\,dx$$

$$\log|y| = x^2 + C$$

$$|y| = e^{x^2+C}$$

$$y = \pm e^{x^2+C} = \pm e^C e^{x^2}$$

$$\therefore\ y = Ae^{x^2}\ (A = \pm e^C \text{は任意定数})$$

"C"も任意やから
±e^Cも任意なはず。
だからまとめて
"A"とおく。

(2) $y\dfrac{dy}{dx} = 1 - x$ より，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1-x}{y}$．

よって，$y\,dy = (1-x)\,dx$

フムフム

$$\int y\,dy = \int (1-x)\,dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = x - \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 2C = 0$$

$$\therefore\ x^2+y^2-2x+A = 0\ (A = -2C \text{は任意定数})$$

(3) $x\dfrac{dy}{dx} + 1 = y$ より，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-1}{x}$．

よって，$\dfrac{1}{y-1}\,dy = \dfrac{1}{x}\,dx$

$$\int \frac{1}{y-1}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\log|y-1| = \log|x| + C$$

$$\log|y-1| = \log|x| + \log e^C$$

$$\log|y-1| = \log e^C|x|$$

$$|y-1| = e^C|x|$$

$$y - 1 = \pm e^C x$$

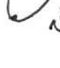
$$\therefore\ y = Ax + 1\ (A = \pm e^C \text{は任意定数})$$

■

やってる
積分計算
自体は
大したことないネ

OK〜

形が似ている微分方程式でも
出てくる結果は全然ちがうのね



ふ〜ん

もう少し複雑な微分方程式を解いてみよう．

例題 2.　$(y+y')\sin x = y\cos x$

解　$\left(y+\dfrac{dy}{dx}\right)\sin x = y\cos x$ より，

$y\sin x + \dfrac{dy}{dx}\sin x = y\cos x.$

$\dfrac{dy}{dx}\sin x = (\cos x - \sin x)y$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos x - \sin x}{\sin x}y$

よって，$\dfrac{1}{y}dy = \dfrac{\cos x - \sin x}{\sin x}dx$

ムズそうやけど機械的に割りふっていきます。

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x}\,dx$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \left(\frac{\cos x}{\sin x} - 1\right)dx$$

$$\log|y| = \log|\sin x| - x + C$$

$$\log|y| = \log|\sin x| + \log e^{-x} + \log e^{C}$$

$$\log|y| = \log e^{C}e^{-x}|\sin x|$$

$$|y| = e^{C}e^{-x}|\sin x|$$

$\therefore\ y = Ae^{-x}\sin x$（$A=\pm e^{C}$ は任意定数）

おっと今度は減衰関数　うわっ　■

これらの例からも分かるように，微分方程式をフツーに解くと任意定数が残ります（これを一般解という）．しかし，「$x=a$ のとき $y=b$」などの条件があれば，任意定数を決定することができます（これを特殊解という）．

フムフム

例題 3.　$y'=4xy^2$ の解のうち，$x=0$ のとき $y=-1$ を満たす関数を求めよ．

解　$\dfrac{dy}{dx} = 4xy^2$ より，$\dfrac{1}{y^2}\,dy = 4x\,dx$

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int 4x\,dx$$

$-\dfrac{1}{y} = 2x^2 + C.$　　$\therefore\ y = -\dfrac{1}{2x^2+C}.$

$x=0$ のとき $y=-1$ なので，$C=1$.

こういうのを初期条件といいます。

$\therefore\ y = -\dfrac{1}{2x^2+1}$

完全決定!!　■

例題 4.　$f(x) = 2x^2 - \displaystyle\int_1^x tf(t)\,dt$ を満たす $f(x)$ を求めよ．

今度は積分方程式か〜　トホホ

考え方　$\displaystyle\int_1^x tf(t)\,dt$ を見たらやることは決まっています．

これは常識!!

そーやった　そーやった　ああ．アレね

解　両辺を x で微分すると，

$f'(x) = 4x - xf(x)$

よって，$\dfrac{dy}{dx} = 4x - xy$ より，$\dfrac{dy}{dx} = x(4-y)$

$\dfrac{1}{4-y}\,dy = x\,dx$

$$\int \frac{1}{4-y}\,dy = \int x\,dx$$

$$-\log|4-y| = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\log|4-y| = -\frac{1}{2}x^2 - C$$

$$|4-y| = e^{-\frac{1}{2}x^2 - C}$$

$$4-y = \pm e^{-\frac{1}{2}x^2 - C} = Ae^{-\frac{1}{2}x^2}\quad (A = \pm e^{-C})$$

よって，$y = -Ae^{-\frac{1}{2}x^2} + 4$

$f(1)=2$ より，$2 = Ae^{-\frac{1}{2}} + 4.$

よって $A = -2e^{\frac{1}{2}}.$

$\therefore\ y = 2e^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x^2} + 4 = 2e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} + 4$

もとの式の両辺に $x=1$ を代入して計算しました。 → なぜ $x=1$ を代入したのか → これも常識．　■

2　その他

変数分離形だけでは面白くないので，ついでにもう１つ．次に紹介するタイプは変数分離形ではないですが，両辺にあるモノをかけると，積の微分公式がにじみ出てきます．

例題 5.　$y' + y = x$

パッと見簡単そうやけど……

解　両辺に e^x をかけると，$e^xy' + e^xy = xe^x$.

$e^xy' + e^xy = e^xy' + (e^x)'y = (e^xy)'$ なので，

$(e^xy)' = xe^x$

積の微分になった!!

$e^xy = \displaystyle\int xe^x\,dx = xe^x - e^x + C$　部分積分!!

$y = e^{-x}(xe^x - e^x + C) = x - 1 + Ce^x$

これはスゴイ!!　■

⇨注　一般に，$y' + ay = f(x)$ において，両辺に e^{ax} をかけると，$e^{ax}y' + (ae^{ax})y = e^{ax}f(x)$.

これも積の微分をイメージする

よって，$(e^{ax}y)' = e^{ax}f(x)$ なので

$e^{ax}y = \displaystyle\int e^{ax}f(x)\,dx$ となり，

$y = e^{-ax}\displaystyle\int e^{ax}f(x)\,dx$ で求めることができます．ここまでくるとパズルの世界ですね．

アハハ　おもしろい