# 微分方程式の活用

せっかくやから
実例を通して
微分方程式の
ありがたみを
実感しよう

具体的な事象を微分方程式で解いてみよう．

## 1　冷却の問題

ある物体が大気中で冷却する速さは，その物体の温度と気温との差に比例すると言われています．たしかに，温かい物体を寒い場所に放置すると，温度差が大きいので物体は急激に冷めていきますが，温度が下がるにつれて今度は逆に，冷める速さがだんだん遅くなっていくことは感覚的に理解できるでしょう．最終的に物体の温度は気温に近づいていくはずです．

フムフム  そりゃそうや

コーヒーは
温かい
ほうが
おいしい

**例題 1.**　1杯のコーヒーが 90°C に温められている．室温 10°C の部屋に 3 分間放置したら，70°C になった．さらに 3 分間放置したら何°C になるか．ただし，室温は一定とし，温度の降下速度は室温との温度差に比例するものとする．

**考え方**　非常に現実的な問題です．最後の文章「温度の降下速度は室温との温度差に比例する」を正しく立式できるかどうかがポイント．

**解**　コーヒーの温度を $x$ とすると，温度の降下速度は室温との温度差に比例するので微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = -k(x-10) \quad (k>0 \text{ は比例定数})$$

が成立する．

単純な
変数分離形
です

$\dfrac{1}{x-10}\,dx = -k\,dt$ より，

$$\int \frac{1}{x-10}\,dx = \int (-k)\,dt$$

$\log|x-10| = -kt + C$

$|x-10| = e^{-kt+C}$

$x-10 = \pm e^{-kt+C} = \pm e^C e^{-kt}$

$\therefore\ x = 10 + Ae^{-kt} \quad (A = \pm e^C \text{ は任意定数})$

初期
条件

$t=0$ のとき $x=90$ なので，$A=80$．よって，

$$x = 10 + 80e^{-kt}$$

次に，$t=3$ のとき $x=70$ なので，

$70 = 10 + 80e^{-3k}$ より，$e^{-3k} = \dfrac{3}{4}$．

よって，$e^{-k} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$ なので

$$x = 10 + 80\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{t}{3}}$$

xとtの関係が
完全に決定しました。

さらに 3 分間放置したときの温度なので，$t=6$ を代入すると，

$$x = 10 + 80\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 10 + 80 \times \frac{9}{16} = 55$$

したがって，コーヒーの温度は 55°C である．

■

**例題 2.**　殺人事件の被害者の死体がある夜 11 時に発見された．警察医が現場に呼ばれて午後 11 時 30 分に到着し，直ちに体温を測ったところ，34.8°C であった．1 時間後にもう一度測ってみたら 34.1°C であった．室温は 20.0°C で一定である．人間の平均体温は 36.5° とし，体温の降下速度は室温との温度差に比例するものとして，死亡時刻を推定せよ．
なお，常用対数表を利用しても良い．

殺人事件が
問題になる
なんて!!

ひゃ〜

**解**　死亡してから $t$ 時間後における死体の体温を $x$ とすると，体温の降下速度は室温との温度差に比例するので微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = -k(x-20.0) \quad (k>0 \text{ は比例定数})$$

が成立する．この微分方程式を解くと

これも変数分離形

$$x = 20.0 + Ae^{-kt} \quad (A = \pm e^C \text{は任意定数})$$

（先ほどと全く同じなので省略）

$t=0$ のとき $x=36.5$ なので，$A=16.5$．

$$\therefore\ x = 20.0 + 16.5e^{-kt}$$

11 時 30 分が死亡してから $t$ 時間後であるとすると，

$$\begin{cases} 34.8 = 20.0 + 16.5e^{-kt} & \cdots① \\ 34.1 = 20.0 + 16.5e^{-k(t+1)} & \cdots② \end{cases}$$

① より，$e^{-kt} = \dfrac{34.8-20.0}{16.5} = \dfrac{14.8}{16.5}$

② より，$e^{-kt}e^{-k} = \dfrac{34.1-20.0}{16.5} = \dfrac{14.1}{16.5}$.

よって，$e^{-k} = \dfrac{14.1}{14.8}$

$\left(\dfrac{14.1}{14.8}\right)^t = \dfrac{14.8}{16.5}$，つまり，$\left(\dfrac{1.41}{1.48}\right)^t = \dfrac{1.48}{1.65}$

$t(\log 1.41 - \log 1.48) = \log 1.48 - \log 1.65$

常用対数表を利用して，

$t(0.1461 - 0.1703) = 0.1703 - 0.2175$

$t = \dfrac{0.1703-0.2175}{0.1461-0.1703} = \dfrac{0.0472}{0.0242} = 1.95$

したがって，11 時 30 分は死亡後 1.95 時間経過しているので，死亡時刻はほぼ 9 時 30 分頃であると推定できる.

これいい問題やったけど
なかなか興味深い

■

## 2　年代測定法

**例題 3.**　ある化学反応において，1 つの物質 A が他の物質 B に変化していく速さは変化せずに残っている物質 A の量に比例するという．最初から存在している物質 A の量を $N_0$ とする．反応開始から T 時間後に物質 A は半減したという．物質 A の $t$ における状態を表す式を作れ．

**解**　反応が開始された時点から測った時間を $t$ とし，物資 A の時刻 $t$ における量を $N$ とすると，

$$\frac{dN}{dt} = -kN\ (k > 0\ \text{は比例定数})$$

が成立する.

これまた変数分離形

またか…

$\dfrac{1}{N}\,dx = -k\,dt$ より，

$$\int \frac{1}{N}\,dx = \int (-k)\,dt$$

$\log|N| = -kt + C$

$|N| = e^{-kt+C}$

$N = \pm e^{-kt+C} = \pm e^C e^{-kt}$

$$\therefore\ \ N = Ae^{-kt}\ \ (A = \pm e^C\ \text{は任意定数})$$

$t = 0$ のとき $N = N_0$ なので，$A = N_0$．よって，

$$N = N_0 e^{-kt}$$

次に，$t = T$ のとき $N = \dfrac{N_0}{2}$ なので，

$\dfrac{N_0}{2} = N_0 e^{-kT}$ より，$e^{-kT} = \dfrac{1}{2}$.

よって，$e^{-k} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T}}$ なので

$$N = N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

物理でも
おなじみの公式でしょ?

■

みおぼえある

物質の量が半分になる時間を半減期といいます．半減期は物質によって決まっています．ウランの半減期が凄まじいですね．これが原発の内部に詰まっているわけです．

| 物質 | 半減期 |
|---|---|
| キセノン 133 | 5 日 |
| セシウム 137 | 30.1 年 |
| 炭素 14 | 5730 年 |
| プルトニウム 239 | 24100 年 |
| ウラン 238 | 45 億年 |

なんじゃこりゃ
スゴっ

考古学，人類学，文化財科学，地震学などの研究では年代測定が重要であり，いくつかの科学的方法が使われています．その中でも有名なものが放射性炭素（炭素 14）を用いた方法で，**例題 3.** で求まった関係式 $N = N_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ を使います．微分方程式の問題ではありませんが「間接的に使っている」ということで最後に紹介しましょう．

**例題 4.**　いつの時代にも大気中には一定の割合で炭素 14 が存在している．生物が生きていれば，その体内にも同じ割合で炭素 14 が存在していると考えられるが，死ぬと炭素 14 を取り込めなくなるので，炭素 14 は半減期 5730 年で減り続けている．したがって，化石中の炭素 14 を測定すれば，その生物が死んでから何年経過したかが分かる．もし，化石中の炭素 14 が $\dfrac{1}{8}$ に減少しているとすると，死後何年経過していると考えられるか．

**解**　半減期の公式 $N = N_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ において，$\dfrac{N}{N_0} = \dfrac{1}{8}$，$T = 5730$ を代入して，

$$\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

$\dfrac{t}{5730} = 3$ なので，$t = 17190$.

よって，死後 17190 年経過している．

微分方程式って
なかなか
おもしろいネ

■

具体例で
やると楽しい。