なめらかだよね・・・

うん
たぶん

1　微分可能とは

関数のグラフが「微分可能である」とは，簡単に言えば「接線がちゃんと引ける」ということです．グラフがツンツンにとがっていたり，途切れてたりすると接線は引けませんね．接線が引けるためには，なめらかにつながっている必要があります．

最初からグラフの形がわかっていれば，見た目でなめらかかかどうか判断できますが，グラフの形が分からない場合はどうすればよいのでしょうか．そのためには，そもそも「なめらかである」とはどういうことなのかを，数学的にきちんと定義する必要があります．

次のようになります．　フムフム

▷Point◁(微分可能の定義)

> 極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が有限確定するとき，関数 $y=f(x)$ は $x=a$ で微分可能であるという．
> 有限確定しないときを $x=a$ で微分不可能であるという．

???
ナニコレ

「極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が有限確定する」とは，右極限値 $\displaystyle\lim_{h\to +0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ と左極限値 $\displaystyle\lim_{h\to -0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が共に存在して一致する場合をいいます．

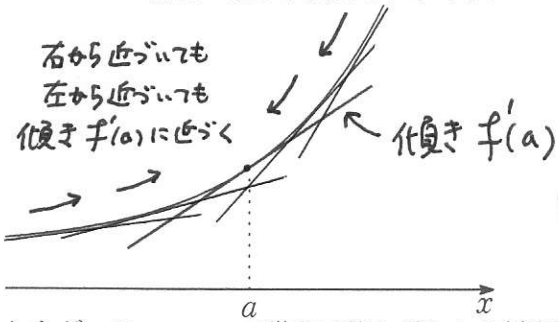
右極限値や左極限値が存在しなかったり，存在したとしても一致しなかったら，微分不可能です．

言うまでもなく，極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ は $f(x)$ の $x=a$ における接線の傾き $f'(a)$ のことです．

つまり，「$x=a$ で微分可能である」とは，$x=a$ での接線の傾きがきちっと定まることをいっているのです．

ふーん
それだけのことか～

✎注　右極限値とは $x=a$ に右側から接線を近づけていくときの接線の傾きのことで，左極限値とは $x=a$ に左側から接線を近づけていくときの接線の傾きのことです．これらがバッチリ一致するとき $x=a$ での接線の傾きが決まるわけです．



イメージしやすいね

したがって，$x=a$ で微分可能かどうかの判定基準は次のようになります．

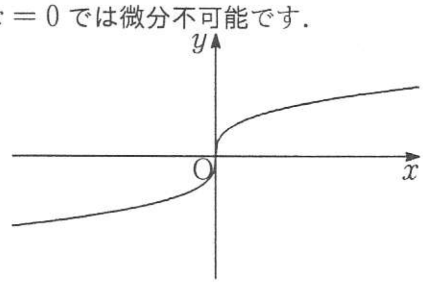
▷Point◁

> $x=a$ で微分可能であることのチェック方法
> $\boxed{\text{質問①}}$　右極限値 $\displaystyle\lim_{h\to +0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在しますか？
> $\boxed{\text{質問②}}$　左極限値 $\displaystyle\lim_{h\to -0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在しますか？
> $\boxed{\text{質問③}}$　右極限値と左極限値が一致しますか？
> 以上，3 つの質問にすべて *yes* ならば，$x=a$ で微分可能です．

1つ1つ順番にチェックするのね

連続性のときと同じや

✎注　例えば，$y=\sqrt[3]{x}$ のグラフは下図のようになります．このグラフは原点付近ではなめらかにつながっていて接線も引けますが，原点で接線を引くと y 軸そのものになり，傾きが存在しないので $x=0$ では微分不可能です．



したがって「微分可能＝接線が引ける＝なめらかにつながっている」と断言するのは間違いです．あくまでも「$x=a$ で微分可能である」とは，「極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が有限確定すること」つまり「$x=a$ における接線の傾きがきちんと定まること」なのです．

ナットクしました一

2　連続性と微分可能性

さて，微分可能かどうかを考えるにあたって，忘れてはならないのは連続性との関係です．

とても重要です

> 関数 $y=f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば，$x=a$ で連続である．

まあ，感覚的に明らかですね．「$x=a$ で接線が引けるならば，$x=a$ でつながっている」と言っているのです．

当然ながら，逆は成立しません．つまり，$x=a$ で連続であっても微分可能であるとは限りません．「つながっている」からといって，「接線が引ける」とは限らないからです．つまり

そりゃそうやな

連続性は微分可能性の必要条件 ← これも重要

です．また，対偶を考えると

連続でなければ微分可能ではない ← これももっと重要

となります．つまり，連続でなければその時点で微分不可能です．だから，微分可能かどうかを調べる前に，連続であるかどうかをチェックせねばなりません (明らかに連続である場合は省略します)．

いちおう証明しておきます．

解　関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能なので $f'(a)$ が存在する．このとき，

この証明はそのうち入試に出ると思う

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}\\&=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)\right\}\\&=f'(a)\cdot 0\\&=0\end{aligned}$$

よって，$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ が成立するので，$f(x)$ は $x=a$ で連続である．

■

注　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ です．$a+h=x$ とおくと，$h=x-a$ であり，$h\to 0$ と $x\to a$ は同じだからです．

そーやったそーやった

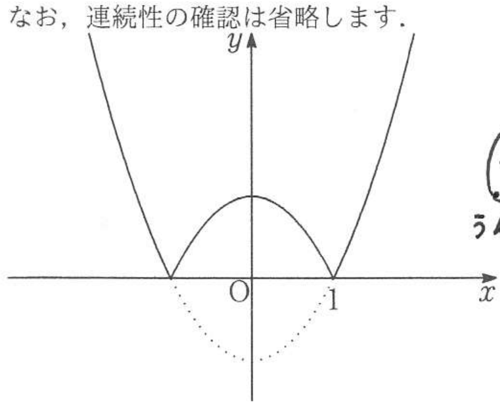
3　具体例で学ぼう (Part 1)

連続性のときと同様，とにかく具体例で考えることが大切です．

> **例題**　$f(x)=|x^2-1|$ の $x=1$ での微分可能性を調べよ．

考え方　$f(x)=|x^2-1|$ のグラフを見れば，$x=1$ でツンツンにとがっているので，$x=1$ で連続かつ微分不可能であることは明らかですが，定義に従って計算で確認してみよう．

なお，連続性の確認は省略します．



どう考えても微分不可能だよねえ

うん

解

$$\begin{aligned}\lim_{h\to+0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}&=\lim_{h\to+0}\frac{|(h+1)^2-1|}{h}\\&=\lim_{h\to+0}\frac{|h^2+2h|}{h}\\&=\lim_{h\to+0}\frac{|h||h+2|}{h}\\&=\lim_{h\to+0}\frac{h|h+2|}{h}\\&=\lim_{h\to+0}|h+2|\\&=3\end{aligned}$$

$\lim_{h\to+0}|h|=h$ になります

$$\begin{aligned}\lim_{h\to-0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}&=\lim_{h\to-0}\frac{|(h+1)^2-1|}{h}\\&=\lim_{h\to-0}\frac{|h^2+2h|}{h}\\&=\lim_{h\to-0}\frac{|h||h+2|}{h}\\&=\lim_{h\to-0}\frac{-h|h+2|}{h}\\&=\lim_{h\to-0}(-|h+2|)\\&=-3\end{aligned}$$

$\lim_{h\to-0}|h|=-h$ になります