よって，右極限値と左極限値が一致しないので，$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ が有限確定しない．したがって，$f(x)$ は $x=1$ で微分不可能である．

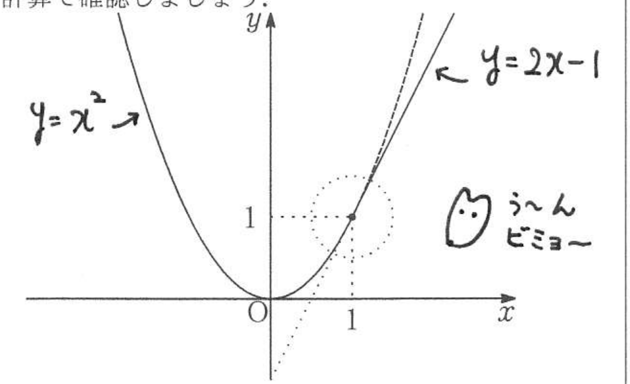
■

「接線が $x=1$ に右側から近づくと，接線の傾きが 3 に近づき，接線が $x=1$ に左側から近づくと，接線の傾きが -3 に近づく．つまり，両サイドで傾きが一致しないので，$x=1$ での接線の傾きも確定しない。だから微分不可能だ」といっているわけです． ナットク〜!!

例 題　$g(x)=\begin{cases} x^2 & (x\leqq1) \\ 2x-1 & (x\geqq1)\end{cases}$

の $x=1$ での微分可能性を調べよ．

考え方　今度は 2 つのグラフが $x=1$ でつながっていますが，実にビミョ〜です．なめらかなような，なめらかでないような・・・こんなときこそ計算で確認しましょう．



解

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{2(h+1)-1-1}{h}$$
$$=\lim_{h\to+0}\frac{2h}{h}$$
$$=\lim_{h\to+0}2$$
$$=2$$

$$\lim_{h\to-0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{(h+1)^2-1}{h}$$
$$=\lim_{h\to-0}\frac{h^2+2h}{h}$$
$$=\lim_{h\to-0}(h+2)$$
$$=2$$

よって，右極限値と左極限値が一致するので

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=2$ と有限確定する．

したがって，$g(x)$ は $x=1$ で微分可能である．

■

注　直線 $y=2x-1$ は $y=x^2$ のグラフの $x=1$ における接線になっています．　やっぱり〜 そんな気してたー

4　具体例で学ぼう (Part 2)

最後に有名な例を 2 つ紹介します．先ほどの 2 つはグラフを見れば何となく様子が分かりましたが，今回はグラフを書くことさえできないし，書いたしても原点付近での様子はサッパリ分かりません．連続かどうかも分かりません．グラフの見た目で判断することは不可能です．

しかし，定義に従って丁寧に計算すれば，連続性や微分可能性の判定が可能です．やってみましょう．

例 題　$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$

の原点での連続性と微分可能性を調べよ．

$x=0$ での連続性

$\dfrac{1}{x}=t$ とすると，　この置き換えは よくやります

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sin t}{t}=0$$

($\because$ $-1\leqq\sin t\leqq1$ で，ハサミウチの原理より)

$$\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to-0}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to-\infty}\frac{\sin t}{t}=0$$

($\because$ $-1\leqq\sin t\leqq1$ で，ハサミウチの原理より)

したがって，右極限値と左極限値が一致するので，$\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=0$．

$f(0)=0$ より $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$ が成立するので，$f(x)$ は $x=0$ で連続である．

■

$x=0$ での微分可能性

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{f(h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to+0}\sin\frac{1}{h}=\lim_{t\to+\infty}\sin t=\text{振動}$$

$$\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{f(h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to-0}\sin\frac{1}{h}=\lim_{t\to-\infty}\sin t=\text{振動}$$

$\left(\text{いずれも，}\dfrac{1}{h}=t\text{ とおいた}\right)$

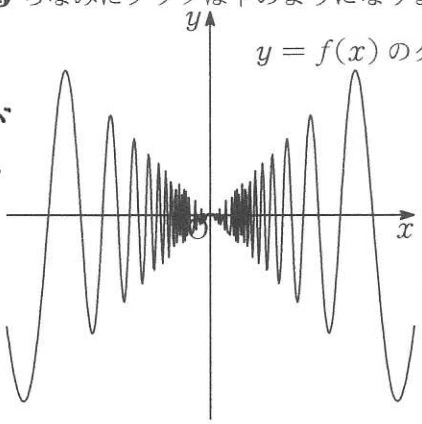
したがって，$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ は有限確定しないので，$f(x)$ は $x=0$ で微分不可能 である．

■

参考 ちなみにグラフは下のようになります．

原点付近がゴチャゴチャ

なんじゃこりゃ



ちなみに y軸対称 (偶関数)

確かに，原点付近がゴチャゴチャしてて見た目で判断するのは絶望的です．原点付近での接線の傾きも $+1$ なのか，-1 なのか判断しかねますね．だから微分不可能なのでしょうね．

> 例題　$g(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$
> の原点での連続性と微分可能性を調べよ．

$\boxed{x=0\text{ での連続性}}$

$\dfrac{1}{x}=t$ とすると，

$$\lim_{x\to+0}g(x)=\lim_{x\to+0}x^2\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sin t}{t^2}=0$$

（$\because$ $-1\leqq\sin t\leqq1$ で，ハサミウチの原理より）

$$\lim_{x\to-0}g(x)=\lim_{x\to-0}x^2\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to-\infty}\frac{\sin t}{t^2}=0$$

（$\because$ $-1\leqq\sin t\leqq1$ で，ハサミウチの原理より）

したがって，右極限値と左極限値が一致するので，$\displaystyle\lim_{x\to0}g(x)=0$．

$g(0)=0$ より $\displaystyle\lim_{x\to0}g(x)=g(0)$ が成立するので，$g(x)$ は $x=0$ で連続 である．

■

$\boxed{x=0\text{ での微分可能性}}$

$$\lim_{h\to+0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{g(h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to+0}h\sin\frac{1}{h}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sin t}{t}=0$$

（$\because$ $-1\leqq\sin t\leqq1$ で，ハサミウチの原理より）

$$\lim_{h\to-0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{g(h)}{h}$$

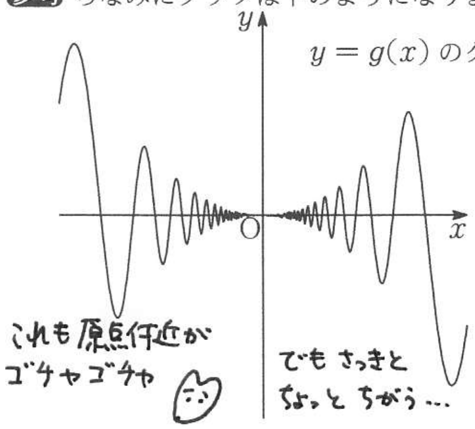
$$=\lim_{h\to-0}h\sin\frac{1}{h}=\lim_{t\to-\infty}\frac{\sin t}{t}=0$$

（$\because$ $-1\leqq\sin t\leqq1$ で，ハサミウチの原理より）

したがって，右極限値と左極限値が一致するので，$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}$ は 0 に有限確定する．よって，$g(x)$ は $x=0$ で微分可能 である．

■

参考 ちなみにグラフは下のようになります．



ちなみに 原点対称 (奇関数)

確かに，原点付近がゴチャゴチャしてて見た目で判断するのは絶望的ですが，よ〜く見ると原点付近での接線の傾きが 0 になってそうです．だから微分可能なのでしょうね．先ほどの $f(x)$ のグラフと見比べてみよう．

> $f(x)$ も $g(x)$ もどちらも原点付近がゴチャゴチャしているのに，一方だけが微分可能になるのは何とも不思議です．いずれにしても，定義を正確に頭に入れて，落ち着いて計算することですね．「ハサミウチの原理」がポイントのようです．