

これができないとダメよ～ダメダメ！ (三角関数編)

数学Ⅲでは、まずは正確に微分できないと話になりません。ポイントとなるのは合成関数の微分を自由自在に操れるかどうか、です。合成関数の微分をもう一度確認しておこう。

▷Point◁(合成関数の微分)

$y = f(u)$, $u = g(x)$ がそれぞれ u , x の微分可能な関数であるとき、
合成関数 $y = f(g(x))$ も微分可能で、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

という関係式が成立する。

実際は、この公式を使うことはマレで、次のようにザックリと考えることがほとんどです。

▷Point◁

合成関数の微分の基本姿勢
ある部分を「ひとまとめ」に見てザックリ微分し、最後に「ひとまとめ」の微分をくっつける。

【例】 $y = (2x + 3)^4$ の微分は？

●
$$\frac{dy}{dx} = 4(2x + 3)^3 \cdot (2x + 3)'$$

$$= 8(2x + 3)^3$$

三角関数のザックリ微分の代表格は次の公式で

す。これらは頻出かつ重要です。

▷Point◁(ザックリ微分の公式)

$$(\sin f(x))' = \cos f(x) \cdot f'(x)$$

$$(\cos f(x))' = -\sin f(x) \cdot f'(x)$$

$$(\tan f(x))' = \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$$

【考え方】 合成関数の微分法を用います。sin の場合のみ証明しときます。

$y = \sin f(x)$ において、 $f(x) = u$ とおくと、 $y = \sin u$ であり、 $\frac{dy}{du} = \cos u$, $\frac{du}{dx} = f'(x)$ なので、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \cos u \cdot f'(x) = \cos f(x) \cdot f'(x)$$

次の2つの【例】は基本的かつ重要です。

【例】 $y = \sin 2x$ の微分は？

●
$$\frac{dy}{dx} = \cos 2x \cdot (2x)' = 2 \cos 2x.$$

【例】 $y = \sin^2 x$ の微分は？

●
$$\frac{dy}{dx} = 2 \sin x \cdot (\sin x)' = 2 \sin x \cos x.$$

【例題】 次の関数を微分せよ。

(1) $y = 2x - \cos x$ (2) $y = \sin x - \tan x$ (3) $y = \cos(2x - 1)$

(4) $y = \tan 3x$ (5) $y = \cos(\sin x)$ (6) $y = \sin x^2$

(7) $y = \tan x^2$ (8) $y = \cos^3 x$ (9) $y = \tan^3 x$

(10) $y = \frac{1}{\cos x}$ (11) $y = \frac{1}{\sin^2 x}$ (12) $y = x \sin 2x$

(13) $y = \sin x \cos x$ (14) $y = \sin 3x \cos 5x$

【考え方】 合成関数の微分法は、置き換えして丁寧にやる「慎重派」と大ざっぱにやる「ザックリ派」という2つの流派に分かれます。個人的には「ザックリ派」でやってほしいですが、せっかくなので(3)～(11)を2つの流派どちらもやってみます。なお、(1)(2)は公式で一発終了。(12)～(14)は積の微分公式です。

●

(1) $\frac{dy}{dx} = 2 + \sin x.$ (2) $\frac{dy}{dx} = \cos x - \frac{1}{\cos^2 x}.$
(3)

慎重派の解答

$2x - 1 = u$ とおくと、 $y = \cos u$ であり、

$\frac{dy}{du} = -\sin u$, $\frac{du}{dx} = 2$ なので、
 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\sin u \cdot 2 = -2 \sin(2x - 1).$

ザックリ派の解答

$\frac{dy}{dx} = -\sin(2x - 1) \cdot (2x - 1)' = -2 \sin(2x - 1)$

(4)

慎重派の解答

$$3x = u \text{ とおくと, } y = \tan u \text{ であり,}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\cos^2 u}, \quad \frac{du}{dx} = 3 \text{ なので,}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot 3 = \frac{3}{\cos^2 3x}.$$

ザックリ派の解答

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 3x} \cdot (3x)' = \frac{3}{\cos^2 3x}.$$

(5)

慎重派の解答

$$\sin x = u \text{ とおくと, } y = \cos u \text{ であり,}$$

$$\frac{dy}{du} = -\sin u, \quad \frac{du}{dx} = \cos x \text{ なので,}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\sin u \cdot \cos x$$

$$= -\sin(\sin x) \cos x.$$

ザックリ派の解答

$$\frac{dy}{dx} = -\sin(\sin x) \cdot (\sin x)'$$

$$= -\sin(\sin x) \cos x.$$

(6)

慎重派の解答

$$x^2 = u \text{ とおくと, } y = \sin u \text{ であり,}$$

$$\frac{dy}{du} = \cos u, \quad \frac{du}{dx} = 2x \text{ なので,}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos u \cdot 2x = 2x \cos x^2.$$

ザックリ派の解答

$$\frac{dy}{dx} = \cos x^2 \cdot (x^2)' = 2x \cos x^2.$$

(7)

慎重派の解答

$$x^2 = u \text{ とおくと, } y = \tan u \text{ であり,}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\cos^2 u}, \quad \frac{du}{dx} = 2x \text{ なので,}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot 2x = \frac{2x}{\cos^2 x^2}.$$

ザックリ派の解答

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x^2} \cdot (x^2)' = \frac{2x}{\cos^2 x^2}.$$

$$(12) \quad \frac{dy}{dx} = x' \sin 2x + x(\sin 2x)' = \sin 2x + x(2 \cos 2x) = \sin 2x + 2x \cos 2x.$$

$$(13) \quad \frac{dy}{dx} = (\sin x)' \cos x + \sin x(\cos x)' = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x.$$

$$(14) \quad \frac{dy}{dx} = (\sin 3x)' \cos 5x + \sin 3x(\cos 5x)' = 3 \cos 3x \cos 5x + \sin 3x(-5 \sin 5x)$$

$$= 3 \cos 3x \cos 5x - 5 \sin 3x \sin 5x.$$

⇒注 何度も何度も練習して, 全問完璧にマスターしておくこと. できれば『ザックリ派』でいこう.

(8)

慎重派の解答

$$\cos x = u \text{ とおくと, } y = u^3 \text{ であり,}$$

$$\frac{dy}{du} = 3u^2, \quad \frac{du}{dx} = -\sin x \text{ なので,}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= 3u^2 \cdot (-\sin x) = -3 \cos^2 x \sin x.$$

ザックリ派の解答

$$\frac{dy}{dx} = 3 \cos^2 x \cdot (\cos x)' = -3 \cos^2 x \sin x.$$

(9)

慎重派の解答

$$\tan x = u \text{ とおくと, } y = u^3 \text{ であり,}$$

$$\frac{dy}{du} = 3u^2, \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ なので,}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x}.$$

ザックリ派の解答

$$\frac{dy}{dx} = 3 \tan^2 x \cdot (\tan x)' = \frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x}.$$

(10)

慎重派の解答

$$\cos x = u \text{ とおくと, } y = u^{-1} \text{ であり,}$$

$$\frac{dy}{du} = -u^{-2}, \quad \frac{du}{dx} = -\sin x \text{ なので,}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -u^{-2} \cdot (-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

ザックリ派の解答

$$\frac{dy}{dx} = -(\cos x)^{-2} \cdot (\cos x)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

(11)

慎重派の解答

$$\sin x = u \text{ とおくと, } y = u^{-2} \text{ であり,}$$

$$\frac{dy}{du} = -2u^{-3}, \quad \frac{du}{dx} = \cos x \text{ なので,}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -2u^{-3} \cdot \cos x = \frac{-2 \cos x}{\sin^3 x}.$$

ザックリ派の解答

$$\frac{dy}{dx} = -2(\sin x)^{-3} \cdot (\sin x)' = \frac{-2 \cos x}{\sin^3 x}.$$