ブブンセキブンブン


ブブ～ン
セキブ～ン

部分積分法とは「種類の異なる2種類の関数の積」の形をした関数の積分をする場合に有効な積分方法です．パズル感覚で臨もう．

1　部分積分法とは

見やすくするために，$f(x)=f$，$g(x)=g$，$f'(x)=f'$，$g'(x)=g'$ と略記します．このとき，次の公式が成立します．

▷Point◁(部分積分の公式)

$$\int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dt$$

$$\int fg'\,dx = fg - \int f'g\,dt$$

証明は簡単です．積の微分公式より

$$(fg)' = f'g + fg'$$

両辺を x で積分すると，

$$fg = \int (f'g + fg')\,dx$$

$$\therefore\quad fg = \int f'g\,dx + \int fg'\,dx$$

よって，右辺部をそれぞれ移項して，

$$\int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dt$$

$$\int fg'\,dx = fg - \int f'g\,dt$$

となります．証明終わり．

注　部分積分の公式

$$\int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dt$$

′(ダッシュ)がズレた!!

を良く見ると，左辺部分は f に′がついていて，右辺部分は g に′がついています．あたかも f についていた′が g の方に移ってきたように感じられます．このように，部分積分の公式を f についていた′(ダッシュ)を g の方へズラす公式であると意識することが重要です．

▷Point◁(部分積分の本質)

部分積分とは，′(ダッシュ)をズラす計算方法である．′(ダッシュ)をズラすことで，積の形がうまく解消できるようにすることがポイントである．

つまり，最初に′(ダッシュ)をどっちにつけるのか，′(ダッシュ)をどのように生み出すのか，がポイントになります．

フムフム

例題 1.　(1) $\displaystyle\int x\sin 2x\,dx$

(2) $\displaystyle\int (2x-1)e^x\,dx$

(3) $\displaystyle\int x^3\log x\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$

(5) $\displaystyle\int xe^{-3x}\,dx$

考え方　いずれも2種類の関数を掛け合わせた関数になっています．これこそまさに部分積分です．

解 (1)

$$\begin{aligned}
&\int x\sin 2x\,dx\\
=&\int x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)'\,dx\\
=&-\frac{x}{2}\cos 2x - \int x'\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\,dx\\
=&-\frac{x}{2}\cos 2x - \int \left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\,dx\\
=&-\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx\\
=&-\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + C\\
=&-\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C
\end{aligned}$$

前についてたxが消滅した(積の形が解消された)

(2)

$$\begin{aligned}
&\int (2x-1)e^x\,dx\\
=&\int (2x-1)(e^x)'\,dx\\
=&(2x-1)e^x - \int (2x-1)'e^x\,dx\\
=&(2x-1)e^x - \int 2e^x\,dx\\
=&(2x-1)e^x - 2e^x + C\\
=&(2x-3)e^x + C
\end{aligned}$$

どちらも′(ダッシュ)をズラすことで積の形をなくすことができてます

ナルホド～

前についてた2x-1が消滅した(積の形が解消された)

(3)

$$\int x^3 \log x\, dx$$
$$=\int \left(\frac{1}{4}x^4\right)' \log x\, dx$$
$$=\frac{1}{4}x^4\log x-\int \frac{1}{4}x^4(\log x)'\, dx$$
$$=\frac{1}{4}x^4\log x-\int \frac{1}{4}x^4\cdot\frac{1}{x}\, dx$$

← うまく約分できます!!

$$=\frac{1}{4}x^4\log x-\int \frac{1}{4}x^3\, dx$$
$$=\frac{1}{4}x^4\log x-\frac{1}{16}x^4+C$$

これがポイント

うまいね

(4)

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx=\int x(\tan x)'\, dx$$
$$=x\tan x-\int x'\tan x\, dx$$
$$=x\tan x-\int \tan x\, dx$$

$\frac{1}{\cos^2 x}$ をみたら $\tan x$ を思い出そう.

ところで，$\int \tan x\, dx$ は，$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ なので，$\cos x=t$ とおくと，$-\sin x\, dx=dt$ より，

$$\left\{\begin{aligned}\int \tan x\, dx&=\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx\\&=\int \frac{1}{\cos x}\cdot\sin x\, dx\\&=\int -\frac{1}{t}\, dt\\&=-\log|t|+C\\&=-\log|\cos x|+C\end{aligned}\right.$$

置換積分の代表例。すぐにできるようになろう。

はーい

したがって，求める不定積分は

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx=x\tan x+\log|\cos x|+C$$

(5)

この積分は符号ミスしやすいので特に気をつけよう

$$\int xe^{-3x}\, dx$$
$$=\int x\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)'\, dx$$
$$=-x\frac{1}{3}e^{-3x}-\int (x)'\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)\, dx$$
$$=-\frac{x}{3}e^{-3x}-\int\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)\, dx$$
$$=-\frac{x}{3}e^{-3x}+\frac{1}{9}e^{-3x}+C$$

落ち着いて計算しよう

ちょっと自信ない…

■

✏注　いずれの積分も，次のように最初の $'$ を生み出す変形がポイントです．最初の第一歩が全てです．

$$\int x\sin 2x\, dx=\int x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)'\, dx$$
$$\int (2x-1)e^x\, dx=\int (2x-1)(e^x)'\, dx$$
$$\int x^3\log x\, dx=\int\left(\frac{1}{4}x^4\right)'\log x\, dx$$
$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx=\int x(\tan x)'\, dx$$
$$\int xe^{-3x}\, dx=\int x\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)'\, dx$$

こんなんいきなり思いつくかっ?

うーん

これらの積分は，積の形をしていますが，$'$（ダッシュ）をずらすことで，ヤッカイな積の部分が撃破されていることを感じてください．だから，

$$\int x\sin 2x\, dx=\int\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\sin 2x\, dx$$
$$\int (2x-1)e^x\, dx=\int (x^2-x)'e^x\, dx$$

などと解釈してしまうと（やってみると分かりますが），積の形が解消されるどころか次数も上がってしまって大変なことになります．失敗です．つまり，部分積分とは初めの一歩の時点でこの後の計算結果をある程度予想しているのです．そういう意味で，部分積分法とは「未来を予想する積分」ともいえますね．

未来を予測するなんてス・テ・キ

例題 **2.**　$\int x^2e^{-x}\, dx$

考え方　1 回の部分積分で終わらない場合は，もう 1 回やるしかありません．今回の場合，e^x ではなく e^{-x} なので，$(e^{-x})'=-e^{-x}$ より，符号ミスに細心の注意をしよう．

なんで同じことを2回もさせるねん…

いや〜

解　$\int x^2e^{-x}\, dx$

$$=\int x^2(-e^{-x})'\, dx$$
$$=x^2(-e^{-x})-\int (x^2)'\cdot(-e^{-x})\, dx$$
$$=-x^2e^{-x}+\int 2xe^{-x}\, dx$$
$$=-x^2e^{-x}+2\int x(-e^{-x})'\, dx$$
$$=-x^2e^{-x}+2\left(-xe^{-x}-\int x'(-e^{-x})\, dx\right)$$
$$=-x^2e^{-x}+2\left(-xe^{-x}+\int e^{-x}\, dx\right)$$
$$=-x^2e^{-x}+2(-xe^{-x}-e^{-x})+C$$
$$=-(x^2+2x+2)e^{-x}+C$$

■