例題 3. $\displaystyle\int x^2 \sin 2x \, dx$

考え方　まず，最初の第一歩を
$$\int x^2 \sin 2x \, dx = \int x^2 \left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)' dx$$
と解釈して部分積分すると，$\displaystyle\int x \cos 2x \, dx$ が登場するので，もう一度部分積分します．これまたトータル 2 回の部分積分です．

だから一
2回もイヤやって!!

かんべんしてよ

解　
$$\begin{aligned}
&\int x^2 \sin 2x \, dx \\
&= \int x^2 \left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)' dx \\
&= -\frac{x^2}{2}\cos 2x - \int (x^2)' \left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) dx \\
&= -\frac{x^2}{2}\cos 2x - \int 2x \left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) dx \\
&= -\frac{x^2}{2}\cos 2x + \int x \cos 2x \, dx \\
&= -\frac{x^2}{2}\cos 2x + \left\{\int x \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)' dx\right\} \\
&= -\frac{x^2}{2}\cos 2x + \left\{\frac{x}{2}\sin 2x - \int \frac{1}{2}\sin 2x \, dx\right\} \\
&= -\frac{x^2}{2}\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C
\end{aligned}$$

2　部分積分の応用

次の不定積分は絶対暗記です．

重要公式

▷Point◁ ($\tan x$ の積分公式)

$$\int \log x \, dx = x \log x - x + C$$

☆ 絶対に暗記すること!!

はーい

考え方　′(ダッシュ) の形を作ろうにも手がかりがありません．この場合は，自分で微分の形を創り出すタイプです．つまり
$$\int \log x \, dx = \int 1 \cdot \log x \, dx = \int x' \log x \, dx$$
と解釈することがポイント．

解　
$$\begin{aligned}
\int \log x \, dx &= \int x' \log x \, dx \\
&= x \log x - \int x (\log x)' \, dx \\
&= x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\
&= x \log x - \int 1 \, dx \\
&= x \log x - x + C
\end{aligned}$$

この約分がポイント

うまいことなっとるね

スゲ〜

例題 4. $\displaystyle\int \log(1-x) \, dx$

考え方　先ほどの公式が使えるように，$1-x=t$ と置換積分します．

なお，公式 $\displaystyle\int \log x \, dx = x \log x - x$ の x をそのまま $1-x$ に入れ換えてはいけません．

解　$1-x=t$ とおくと $-dx=dt$ より，
$$\begin{aligned}
&\int \log(1-x) \, dx \\
&= \int -\log t \, dt \\
&= -t\log t + t + C \\
&= -(1-x)\log(1-x) - (1-x) + C \\
&= -(1-x)\log(1-x) + x - 1 + C
\end{aligned}$$

この積分は暗記しておこう!!

➾注　$-1+C$ を新たに C と置き直して
$-(1-x)\log(1-x) + x + C$ としても構いません．

例題 5.
(1) $\displaystyle\int x \log(x^2-2) \, dx$
(2) $\displaystyle\int e^x \log(e^x+1) \, dx$

考え方　これも置換積分しましょう．$x^2-2=t$，$e^x+1=t$ と置換するとうまくいきます．

解　(1) $x^2-2=t$ とおくと，$2xdx=dt$
$$\begin{aligned}
&\int x \log(x^2-2) \, dx \\
&= \int \frac{1}{2}\log t \, dt \\
&= \frac{1}{2}\{t\log t - t\} + C \\
&= \frac{1}{2}\{(x^2-2)\log(x^2-2) - (x^2-2)\} + C
\end{aligned}$$

(2) $e^2+1=t$ とおくと，$e^x dx = dt$
$$\begin{aligned}
&\int e^x \log(e^x+1) \, dx \\
&= \int t \log t \, dt \\
&= t\log t - t + C \\
&= (e^x+1)\log(e^x+1) - (e^x+1) + C
\end{aligned}$$

このように，「部分積分」と「置換積分」の両方をいつでも自由に使えるように準備しておくことが大切です．

二刀流を極めます…

例題 6. $\displaystyle\int x\log(x-2)\,dx$

考え方 シンプルですが，なかなか難問．とりあえず，置換積分でやってみましょう．

解 $x-2=t$ とおくと $dx=dt$ より，

$$\int x\log(x-2)\,dx$$
$$=\int(t+2)\log t\,dt$$
$$=\int t\log t\,dt+\int 2\log t\,dt$$

置換することでlogを分けることができました。

見覚えのある形になった  ムムム

$$\int x\log x\,dx=\int\left(\frac{x^2}{2}\right)'\log x\,dx$$
$$=\frac{x^2}{2}\log x-\int\frac{x^2}{2}(\log x)'\,dx$$
$$=\frac{x^2}{2}\log x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$=\frac{x^2}{2}\log x-\int\frac{x}{2}\,dx$$
$$=\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}+C$$

$$\therefore\quad\int t\log t\,dt=\frac{t^2}{2}\log t-\frac{t^2}{4}+C$$

また，$\displaystyle\int\log t\,dt=t\log t-t+C$

これは公式ですよ

よって，もとめる不定積分は

$$\frac{t^2}{2}\log t-\frac{t^2}{4}+2(t\log t-t)+C$$
$$=\left(\frac{t^2}{2}+2t\right)\log t-\frac{t^2}{4}-2t+C$$
$$=\frac{1}{2}(x^2-4)\log(x-2)-\frac{1}{4}x^2-x+3+C$$

注 最後の $t=x-2$ を戻す計算は省略しました．

例題 7. $\displaystyle\int(\log x)^3\,dx$

イヤ〜な予感… 

考え方 残りスペースが少ないので，流れだけを紹介します．

まず，$\displaystyle\int(\log x)^3\,dx=\frac{1}{4}(\log x)^4$ と答える人がとても多いのですが，全く違います．$\dfrac{1}{4}(\log x)^4$ を微分しても，$(\log x)^3$ とはなりません．

この積分は

$$\int(\log x)^3\,dx$$
$$=\int x'(\log x)^3\,dx$$
$$=x(\log x)^3-\int x\cdot3(\log x)^2(\log x)'\,dx$$
$$=x(\log x)^3-\int 3(\log x)^2\,dx$$

と解釈して部分積分します．

すると $\displaystyle\int(\log x)^2\,dx$ が登場するので，今度は

$$\int(\log x)^2\,dx$$
$$=\int x'(\log x)^2\,dx$$
$$=x(\log x)^2-\int x\cdot2(\log x)(\log x)'\,dx$$
$$=x(\log x)^2-\int 2(\log x)\,dx$$

と解釈して再度，部分積分します．

すると最後に $\displaystyle\int\log x\,dx$ が登場します．この結果を暗記している人は，これで終わりですが，覚えていない人は，

$$\int\log x\,dx=\int x'\log x\,dx$$

と解釈して再々度，部分積分します．これでやっと終わり．つまり，最大３回の部分積分が必要になるのです．

ああ疲れた．単なる嫌がらせですね．カンベンしてほしいよね．

 3回もさせるなんて…エエかげんにしてほしいわ

3　最後に

置換積分法と部分積分法の２つがあれば，大抵の積分は解決します．しかし，「置換積分法と部分積分法のどっちを使えば良いんですか？どうやって区別するんですか？」と聞いてくる人があります．これはばっかりは「やってみないとわかりません」としか言いようがありません．置換積分法と部分積分法の２通りしかないんだから，とりあえずどちらかの方法でやってみて，うまくいけばラッキーで，うまくいかんかったら方針転換すればよいだけのことです．

まあとりあえずやってみることですね

 うん

失敗を恐れず，どんどん積分練習そてほしいものです．数をこなせば，どっちの方法で積分すれば良いのか，だんだんわかってくるでしょう．

 は〜い