置換積分って，すごっ！ オモロっ！

1　置換積分法とは

積分する文字を変更して計算する手法のことを『置換積分法』といいます．複雑な積分を一気に解決するスゴ技です．

置換積分の公式は極めて単純かつ明快です．

▷Point◁（置換積分の公式）

xの積分

$$\int \underbrace{f(x)}_{\text{これをxで積分}}\,\underline{\underline{dx}} = \int \underbrace{f(x)\frac{dx}{dt}}_{\text{これをtで積分}}\,\underline{\underline{dt}}$$

tの積分

$\displaystyle\int f(x)\,dx \longrightarrow f(x)$ を x で積分したもの

$\displaystyle\int f(x)\frac{dx}{dt}\,dt \longrightarrow f(x)\frac{dx}{dt}$ を t で積分したもの

を表しています．

この公式は，積分する文字が違うにもかかわらず，これらが等しいことを意味しているのですが，

$\dfrac{dx}{dt}\,dt$ を形式的に割り算すると dx になる

つまり，

$$\frac{dx}{dt}\,dt = dx$$

ホンマに
約分みたいや…
美しい

と『約分しただけ』と考えれば，置換積分の公式が，形式的にも成り立っていることが分かると思います．

証明

$y = \displaystyle\int f(x)\,dx$ とおくと，$\dfrac{dy}{dx} = f(x)$．

合成関数の微分公式より

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = f(x)\cdot\frac{dx}{dt}$$

よって，

$$y = \int f(x)\frac{dx}{dt}\,dt$$

そんなに難しい
証明じゃないネ
うん．

したがって，

$$\int f(x)\,dx = \int f(x)\frac{dx}{dt}\,dt$$

■

まずは，具体例で置換積分に慣れよう．

例題 1.　$\displaystyle\int x\sqrt{x+2}\,dx$

こんなん
ムリ〜

考え方　積分計算は『積の形』に弱いのです．この場合，x と $\sqrt{x+2}$ をかけた形であり，このままではどうすることもできません．ましてや $\sqrt{}$ があるので，さらなる困難を予感させます．こんなときに，置換積分法が威力を発揮します．

「何を置換するのか」には，コレと言ったルールはありません．とにかく何でもいいからテキトーに置換してみることです．

解　$\underline{\underline{\sqrt{x+2} = t}}$ とおくと，$x + 2 = t^2$．$x = t^2 - 2$ なので，

$$\frac{dx}{dt} = 2t \qquad \cdots(※)$$

まあフツーは
√ をtと置くわな…
うん

したがって，

$$\int f(x)\,dx = \int f(x)\frac{dx}{dt}\,dt$$

1つ1つが
tの式に置き換わる

より，

$$\begin{aligned}\int \underline{x}\,\underline{\underline{\sqrt{x+2}}}\,dx &= \int \underline{(t^2-2)}\,\underline{\underline{t}}\cdot 2t\,dt\\ &= \int (2t^4 - 4t^2)\,dt\\ &= \frac{2}{5}t^5 - \frac{4}{3}t^3 + C\\ &= \frac{2}{5}(\sqrt{x+2})^5 - \frac{4}{3}(\sqrt{x+2})^3 + C\end{aligned}$$

公式に
当てはめるだけ
とても
機械的

✎注　x に関する積分を t に関する積分に置き換えて計算しています．いったん全て t で表して計算した後，最後に x に戻すことを忘れないようにしてください．

✎注　模範解答などでは，さらに式変形して

$$\frac{2(3x-4)(x+2)\sqrt{x+2}}{15} + C$$

としていますが，べつにここまでしなくても構いません．テキトーなところで止めといて OK です．なぜなら，今後「定積分」の値を計算することが目標になるので，ムリに変形しなくても，数値計算した結果が求められれば良いからです．

2　微分形式

このように，置換積分は公式にしたがって丁寧に計算すればできるのですが，もう少し計算を簡略化することができます．

計算過程を振り返ってみると，

$$\int x\sqrt{x+2}\,dx=\int(t^2-2)t\cdot 2t\,dt$$

の部分は

$$\int\boxed{x\sqrt{x+2}}\,dx=\int\boxed{(t^2-2)t\cdot 2t}\,dt$$

と見るのが本筋なんですが，

$$\int x\sqrt{x+2}\,\boxed{dx}=\int(t^2-2)t\cdot\boxed{2t\,dt}$$

と見ると

dx が $2t\,dt$ に置き換わっている

と考えることができます．このことは

$$\frac{dx}{dt}=2t\qquad\cdots(※)$$

において，$\dfrac{dx}{dt}$ を分数と考えて dt を形式的に両辺にかけた式

$$\boxed{dx=2t\,dt}$$

から導かれているとも考えられます．

この感覚は非常に重要で，置換積分を手早く正確に実行するために不可欠な考え方です．

このように，$\dfrac{dx}{dt}$ を分数と考えて dx や dt を独立させて扱う手法を『微分形式』と言います（『微分形式』の数学的に厳密な定義はメチャクチャ難しいので，とりあえずはこんな程度で勘弁してください）．

つまり，$y=f(x)$ のとき，

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)\iff dy=f'(x)dx$$

とします．もともと $\dfrac{dy}{dx}$ は一つの記号だったのですが，『微分形式』の世界では dx と dy は独立させて考えるので，勝手に dx を両辺にかけて構わないわけです．

この『微分形式』を考えることで，置換積分を見通しよく実行することができます．

参考　今のところは，

$$y=f(x)$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{dy}{dx}=f'(x)\quad\Longrightarrow\quad dy=f'(x)dx$$

と考えていると思いますが，本来は，

$$y=f(x)$$
$$\Downarrow$$
$$dy=f'(x)dx\quad\Longrightarrow\quad\frac{dy}{dx}=f'(x)$$

とするのが本質です．つまり，$dy=f'(x)dx$ が最初にあって，この両辺を dx で割って，これまでの形 $\dfrac{dy}{dx}=f'(x)$ になるのです．

$dy=f'(x)dx$ を $y=f(x)$ の『微分』といいます．この辺の事情については，プリント『微分の本質』を熟読してください．

まあ，具体例を通して慣れよう．

例題 2.　次の関数を『微分形式』で表せ．

(1) $y=x^2+3x+1$　(2) $\sin 2x=t$

(3) $\log(3x+2)=t$　(4) $\sqrt{x^3+1}=t$

注　式を見たら，パッと微分形式を言えるようにしておくこと．

解

(1) $dy=(2x+3)\,dx$

(2) $2\cos 2x\,dx=dt$

(3) $\dfrac{3}{3x+2}\,dx=dt$

(4) $3x^2\,dx=2t\,dt$

サッと答えられるようになろう

注　なぜ，いきなりこんな結果になるのか理解できると思いますが，念のため丁寧に求めておくと，

(1) の場合．$\dfrac{dy}{dx}=2x+3$ より，
分母をはらって $dy=(2x+3)dx$．

(2) の場合．$\dfrac{dt}{dx}=2\cos 2x$ より，
分母をはらって $2\cos 2x\,dx=dt$．

(3) の場合．$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{3}{3x+2}$ より，
分母をはらって $\dfrac{3}{3x+2}dx=dt$．

(4) の場合．$x^3+1=t^2$．
両辺を x で微分すると，$3x^2=2t\dfrac{dt}{dx}$ より，
分母をはらって $3x^2dx=2tdt$．