3　ザックリ積分

例題 **3.**　$\displaystyle\int \cos(2x-1)\,dx$

解　$2x-1=t$ とおくと，$2dx=dt$ より，　← 微分形式の考え方

$$\int \cos(2x-1)\,dx = \int \cos t\cdot\frac{1}{2}dt$$
$$= \frac{1}{2}\int \cos t\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\sin t + C$$
$$= \frac{1}{2}\sin(2x-1) + C$$

セオリー通りにやっています。

まじめにコツコツ

■

さっそく，置換積分法を利用して計算してみましたが，正直言って，ちょっと大げさです．なぜなら，

$$\{\sin(2x-1)\}' = \underset{\uparrow\,(2x-1)'}{2}\cos(2x-1)$$

なので，

$$\int \cos(2x-1)\,dx = \frac{1}{2}\sin(2x-1) + C$$

と，すぐに積分計算できるからです．

他にも，

$$(e^{2x-1})' = 2e^{2x-1}$$

あっ，そっかー
(1次式)'の逆数がくっつくだけなのね

なので，

$$\int e^{2x-1}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x-1} + C$$

それだけのこと

また，

$$(\log|2x-1|)' = \frac{2 \leftarrow (2x-1)'}{2x-1}$$

なので，

$$\int \frac{1}{2x-1}\,dx = \frac{1}{2}\log|2x-1| + C$$

と簡単に積分計算できます．

これらの例からも分かるように，積分の場合においても，ひとまとまりに考える部分が1次式 $ax+b$ の場合に限り，

ザックリ積分して，$\dfrac{1}{a}$ をかける　← $(ax+b)'$の逆数!!

という手法が成立します．

まずは，このタイプの積分に慣れよう．

例題 **4.**

(1) $\displaystyle\int \sqrt[3]{6x+7}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \sin\frac{2\pi}{3}x\,dx$

(3) $\displaystyle\int \cos(3t+2)\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{1-3x}\,dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{(5x+3)^3}\,dx$

(6) $\displaystyle\int e^{2x-1}\,dx$

考え方　いずれも，ひとまとまりに見る部分が1次式 $ax+b$ なので，ザックリ積分して $\dfrac{1}{a}$ をかけます．

解　$\boxed{}$ 部分がポイントです。忘れないように…

はーい

(1)

$$\int \sqrt[3]{6x+7}\,dx = \int (6x+7)^{\frac{1}{3}}\,dx$$
$$= \boxed{\frac{1}{6}}\cdot\frac{1}{\frac{1}{3}+1}(6x+7)^{\frac{1}{3}+1} + C$$
$$= \frac{1}{8}(6x+7)^{\frac{4}{3}} + C$$

(2)

$$\int \sin\frac{2\pi}{3}x\,dx = \boxed{\frac{1}{\frac{2\pi}{3}}}\left(-\cos\frac{2\pi}{3}\right) + C$$
$$= -\frac{3}{2\pi}\cos\frac{2\pi}{3} + C$$

(3)

$$\int \cos(3t+2)\,dx = \boxed{\frac{1}{3}}\sin(3t+2) + C$$

(4)

$$\int \frac{1}{1-3x}\,dx = \boxed{\frac{1}{-3}}\log|1-3x| + C$$
$$= -\frac{1}{3}\log|1-3x| + C$$

(5)

$$\int \frac{1}{(5x+3)^3}\,dx = \int (5x+3)^{-3}\,dx$$
$$= \boxed{\frac{1}{5}}\cdot\frac{1}{-3+1}(5x+3)^{-3+1} + C$$
$$= -\frac{1}{10(5x+3)^2} + C$$

(6) $\displaystyle\int e^{2x-1}\,dx = \boxed{\frac{1}{2}}e^{2x-1} + C$

■

積分は微分の逆なので当然ですね。
慣れるまでは，積分したあとでもう一度微分してもとにもどるか確認するクセをつけよう

はーい

4　置換積分の計算

▷Point◁（置換積分のコツ）

とにかく，カンでもいいから何かを置換してみる．パシッとうまくハマればラッキーだし，ハマらんかったらやり直せばいいだけ．とにかく思いつくままにいろいろ置換してみることが大切．

はーい
失敗なんて気にしませ〜ん

このような手法を押してダメなら引いてみな方式といいます．とにかく，いろいろ試行錯誤して，自分なりの感覚（コツ）をつかんで欲しいと思います．代表的な例を紹介します．なぜ，そうすればうまくいったのかを考えながら取り組もう．

例題 5. $\displaystyle\int \frac{3x-1}{\sqrt{x+1}}\,dx$

考え方　当然ながら $\sqrt{x+1}=t$ と置換し，微分形式を作ります．あとは，どんどん置換していくだけ．

解　$\sqrt{x+1}=t$ とおくと，$x+1=t^2$ より，$dx=2t\,dt$ なので，したがって，

$$\int \frac{3x-1}{\sqrt{x+1}}\,dx=\int \frac{3(t^2-1)-1}{t}\cdot 2t\,dt$$
$$=\int (6t^2-8)\,dt$$
$$=2t^3-8t+C$$
$$=2(\sqrt{x+1})^3-8(\sqrt{x+1})+C$$

微分形式を利用してどんどん置き換えしています。

例題 6. $\displaystyle\int \sin^2 x\cos x\,dx$

考え方　何を置換すればよいか．式の形を見れば，$\sin x$ か $\cos x$ のどちらかしかないはず．じゃあ，どっちなのか．とりあえずカンでやってみて，うまくいけばラッキーだし，あかんかったらやり直すだけです．

カンで
気楽に

解　$\sin x=t$ とおくと，$\cos x\,dx=dt$.

$$\int \sin^2 x\cos x\,dx=\int t^2\,dt$$
$$=\frac{1}{3}t^3+C$$
$$=\frac{1}{2}\sin^3 x+C$$

うまいことなってるな〜
ハマッタ!!

もともとあった $\cos x$ と dx が合わせて dt に置き換わります。

注　$\sin x=t$ とおいて成功しましたが，もし，$\cos x=t$ とおくとどうなるのでしょう．

$\cos x=t$ とおくと，$-\sin x\,dx=dt$ となり，

$$\int \sin^2 x\cos x\,dx=\int \sin x\cdot\cos x\cdot\sin x\,dx$$
$$=\int \sin x\cdot t\cdot(-dt)$$

と，$\sin x$ が1つ余ってしまって，置換しきれていません．だから失敗．こういう失敗経験をたくさん重ねることで，置換がうまくなっていくのです．

失敗を気にせず
どんどんやってみよう
うん

例題 7. $\displaystyle\int \frac{1}{x\log x}\,dx$

考え方　これはもう $\log x=t$ と置くしかありません．$\log x$ の前に x がくっ付いているのが気になるのですが・・・

解　$\log x=t$ とおくと，$\dfrac{1}{x}dx=dt$.

$$\int \frac{1}{x\log x}\,dx=\int \frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$=\int \frac{1}{t}\,dt$$
$$=\log|t|+C$$
$$=\log|\log x|+C$$

お見事!!

例題 8. $\displaystyle\int \frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+1}\,dx$

考え方　分数タイプの関数の積分の攻略はいろいろあるのですが，本問の場合，分母と分子の次数に注目すると，「なるほど！」と納得する置換に巡り合うはず．

解　$x^3+3x^2+1=t$ とおくと，$3(x^2+2x)dx=dt$ なので，

$\frac{1}{3}dt$

$$\int \frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+1}\,dx=\int \frac{1}{3t}\,dt$$
$$=\frac{1}{3}\int \frac{1}{t}\,dt$$
$$=\frac{1}{3}\log|t|+C\quad\cdots\cdots①$$
$$=\frac{1}{3}\log|x^3+3x^2+1|+C$$

これも見事なチカンぶり
オモロっ

注　$\dfrac{n\text{次式}}{(n+1)\text{次式}}$ タイプの積分は今後，頻繁に目にすることになります．