注 $\displaystyle\int \frac{1}{3t}\,dt$ について．トラブルが多いので少し解説します．まず，

$$\int \frac{1}{3t}\,dt = \log|3t| + C$$

とやってしまう人が多いのですが，違います．$\log|3t|$ を微分すると $\dfrac{(3t)'}{3t} = \dfrac{1}{t}$ なので，これはいわゆるザックリ積分タイプです．つまり，

$$\int \frac{1}{3t}\,dt = \frac{1}{3}\log|3t| + C \quad \cdots\cdots ②$$

が正解です．

しかし，ここで「① と ② で形が違うじゃないか．どっちが正しいのか」という質問を受けますが，実は，① と ② は全く同じなのです．確かに，式の形は違うので変な感じなんですが，② は，

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\log|3t| + C &= \frac{1}{3}(\log|3| + \log|t|) + C\\ &= \frac{1}{3}\log|t| + \left(\frac{1}{3}\log|3| + C\right)\end{aligned}$$

と変形し，定数 $\dfrac{1}{3}\log|3| + C$ をまとめて新たに積分定数とすれば，① と同じになります．

このように，不定積分の計算では，積分定数があるため，式の形が違っても同じになるケースがあるので注意しよう．

例題 9. $\displaystyle\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$

考え方 $e^x = t$ と置きたくなりますが，結構ドロ沼にはまります．もうすこし大きく見ましょう．

解 $e^x + e^{-x} = t$ とおくと，$(e^x - e^{-x})dx = dt$ より，

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx &= \int \frac{1}{t}\,dt\\ &= \log|t| + C\\ &= \log|e^x + e^{-x}| + C\end{aligned}$$

注 $e^x + e^{-x} > 0$ なので，最終結果で log の真数部分の絶対値はなくてもかまいません．

例題 10. $\displaystyle\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx$

考え方 前問同様に，$\tan x$ か $\cos x$ か，はたまた $\cos^2 x$ かを置換するしかありません．どれを置換すればよいかは経験で分かります．

解 $\tan x = t$ とおくと，$\dfrac{1}{\cos^2 x}dx = dt.$

$$\begin{aligned}\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx &= \int \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,dx\\ &= \int t\,dt\\ &= \frac{1}{2}t^2 + C\\ &= \frac{1}{2}\tan^2 x + C\end{aligned}$$

例題 11. $\displaystyle\int \tan x\,dx$

考え方 いきなり，$\tan x = t$ と置換してもうまくいきません．これも，経験を積めば分かってくるでしょう．ヒントは，$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ です．

解 (1) $\cos x = t$ とおくと，$-\sin x dx = dt.$

$$\begin{aligned}\int \tan x\,dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx\\ &= \int \frac{1}{\cos x}\cdot \sin x\,dx \quad \to -dt\\ &= \int -\frac{1}{t}\,dt\\ &= -\log|t| + C\\ &= -\log|\cos x| + C\end{aligned}$$

パズルみたいで
楽しいな

例題 12. $\displaystyle\int x\sqrt[3]{1+x}\,dx$

考え方 どう見ても $\sqrt[3]{}$ がうっとうしいので，この部分を置換すべきでしょう．

解 $\sqrt[3]{1+x} = t$ とおくと，$1 + x = t^3$ より，$dx = 3t^2dt.$

$$\begin{aligned}\int x\sqrt[3]{1+x}\,dx &= \int (t^3 - 1)t\cdot 3t^2\,dt\\ &= 3\int (t^6 - t^3)\,dx\\ &= \frac{3}{7}t^7 - \frac{3}{4}t^4 + C\\ &= \frac{3}{7}(\sqrt[3]{1+x})^7 - \frac{3}{4}(\sqrt[3]{1+x})^4 + C\end{aligned}$$

例題 13. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx$

? ? ?
ムムム

考え方 これはムズイ．けど面白い．何を置換するのか全く検討がつかないでしょうね．これがサクサクとできれば立派なもんです．

解 $\tan x = t$ とおくと，$\dfrac{1}{\cos^2 x}dx = dt$.

$$\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$
$$= \int (1+\tan^2 x)\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$
$$= \int (1+t^2)\,dt$$
$$= t + \frac{1}{3}t^3 + C$$
$$= \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C$$

$\tan x$ と $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ は とても相性が良いのです

$\tan x$ ♡ LOVE $\dfrac{1}{\cos^2 x}$

例題 14. $\displaystyle\int (2x+1)e^{x^2+x+5}\,dx$

考え方 e の指数部分 x^2+x+5 を微分すれば $2x+1$ になることに気づけば，必然的に置換の方法は決まってきます．

解 $x^2+x+5 = t$ とおくと，$(2x+1)dx = dt$.

$$\int (2x+1)e^{x^2+x+5}\,dx = \int e^{x^2+x+5}\cdot(2x+1)\,dx$$
$$= \int e^t\,dt$$
$$= e^t + C$$
$$= e^{x^2+x+5} + C$$

やっぱり微分形式って便利やね

注 (n 次式)$\times e^{(n+1)\text{ 次式}}$ タイプは今後も頻繁に目にすることになるでしょう．

例題 15. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{(e^x+2)^2}\,dx$

考え方 う～ん，これもムズイ．でも面白い．e^{2x} をどう解釈するかがポイントでしょう．

解 $e^x + 2 = t$ とおくと，$e^x dx = dt$.

$$\int \frac{e^{2x}}{(e^2+2)^2}\,dx = \int \frac{e^x\cdot e^x}{(e^x+2)^2}\,dx$$
$$= \int \frac{t-2}{t^2}\,dt$$
$$= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t^2}\right)dt$$
$$= \log|t| - 2\frac{1}{-2+1}t^{-2+1} + C$$
$$= \log|t| + \frac{2}{t} + C$$
$$= \log|e^x+2| + \frac{2}{e^x+2} + C$$

$e^{2x} = e^x \times e^x$ と解釈することがポイントです

これはすごい!! 思いつかんわ

注 $e^{2x}dx = e^x\cdot e^x dx$ と考えて，前半の e^x に $e^x = t-2$ を代入し，後半に $e^x dx = dt$ を代入していることが最大のポイント．実にうまくハマッてますよね．なお，$e^x + 2 > 0$ なので，最終結果で log の真数部分の絶対値はなくてもかまいません．

例題 16. $\displaystyle\int \frac{\log x}{x(\log x - 1)^2}\,dx$

考え方 う～ん，これもムズイ．でも面白い．$\log x = t$ と置きたくなりますが・・・

解 $\log x - 1 = t$ とおくと，$\dfrac{1}{x}dx = dt$.

$$\int \frac{\log x}{x(\log x-1)^2}\,dx = \int \frac{\log x}{(\log x - 1)^2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$= \int \frac{t+1}{t^2}\,dt$$
$$= \int \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right)dt$$
$$= \log|t| + \frac{1}{-2+1}t^{-2+1} + C$$
$$= \log|t| - \frac{1}{t} + C$$
$$= \log|\log x - 1| - \frac{1}{\log x - 1} + C$$

最後に．教科書等には，次の関係式が公式として紹介されています．

▷Point◁（置換積分の公式）

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C$$
$$\int \{f(x)\}^\alpha f'(x)\,dx = \frac{1}{\alpha+1}\{f(x)\}^{\alpha+1} + C$$

ただし，$\alpha \neq -1$

いずれも，$f(x) = t$ と置換すれば，$f'(x)dx = dt$ より，

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt$$
$$= \log|t| + C$$
$$= \log|f(x)| + C$$

$$\int \{f(x)\}^\alpha f'(x)\,dx = \int t^\alpha\,dt$$
$$= \frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1} + C$$
$$= \frac{1}{\alpha+1}\{f(x)\}^{\alpha+1} + C$$

となるのは明らかなことなので，あえて暗記する必要はありませんが，頭の片隅の置いておくと，「何を置換すれば良いのか」というひとつの目安になると思います．

はーい