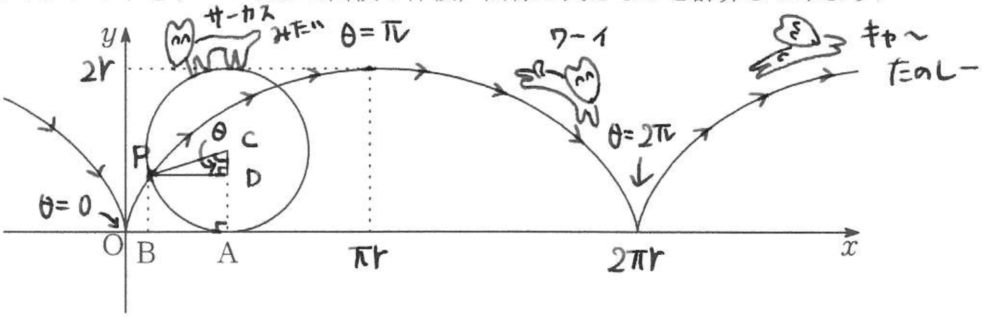
サイクロイドを極める

サイクロイドとは，円が直線に接しながら滑らないで転がるときの円周上の 1 点の描く曲線のことです．授業ではパソコンを使って紹介したので，どんな感じなのかイメージがつくと思います．

今回は，このサイクロイドをテーマにして面積や体積，曲線の長さなどを計算してみよう．



✏注　半径 r の円を転がしたとすると，曲線の一番上の点の y 座標は直径の長さ $2r$ に等しく，原点から出発して，次に x 軸上に戻ってきたときの x 座標は円周の長さ $2\pi r$ に等しいことを意識しよう．

1　サイクロイドの媒介変数表示

上図のように角 θ を定め，サイクロイド上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を媒介変数 θ で表わしてみよう．

直角三角形 CPD に注目します．

CA = CP = r(半径) なので，

$$\text{弧 PA} = \mathrm{OA} = r\theta$$

$$x = \mathrm{OB} = \mathrm{OA} - \mathrm{BA} = r\theta - r\sin\theta$$

$$y = \mathrm{BP} = \mathrm{AC} - \mathrm{DC} = r - r\cos\theta$$

したがって，

▷Point◁

サイクロイドの媒介変数表示

$$\begin{cases} x = r(\theta - \sin\theta) \\ y = r(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

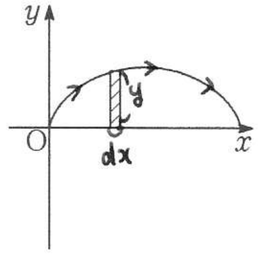
となります．

2　x 軸とで囲まれた部分の面積

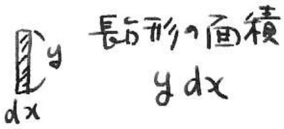
サイクロイド曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めることは基本問題です．まずは，フツーに立式し，その後，θ で置換積分します．積分区間に注意しよう．

解　$S = \displaystyle\int_0^{2\pi r} y\,dx$ である．

$x = r(\theta - \sin\theta)$ より，$dx = r(1 - \cos\theta)\,dt$．

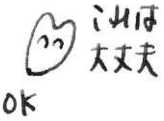


x	0	$\longrightarrow$	$2\pi r$
θ	0	$\longrightarrow$	2π



$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi r} y\,dx &= \int_0^{2\pi} r(1-\cos\theta)\cdot r(1-\cos\theta)\,d\theta \\ &= r^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\,d\theta \\ &= r^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta \\ &= r^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos\theta+\frac{1+\cos\theta}{2}\right)d\theta \\ &= r^2\left[\frac{3}{2}\theta-2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} \\ &= 3\pi r^2\end{aligned}$$

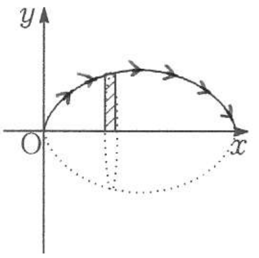
言うまでもなく次数下げ



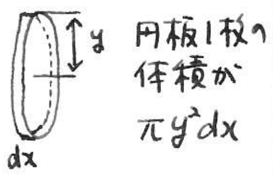
3　x 軸周りの回転体の体積

セオリー通りに回転軸に垂直な断面で考えます．半径 y，厚み dx の微小円板の寄せ集めと考えるのでしたね．先ほどと同様にまずは，フツーに立式し，その後，θ で置換積分します．積分区間に注意しよう．

解　$V_x = \pi\int_0^{2\pi r} y^2\,dx$ である．
$x = r(\theta - \sin\theta)$ より，$dx = r(1-\cos\theta)\,dt$．



x	0	$\longrightarrow$	$2\pi r$
θ	0	$\longrightarrow$	2π



$$\pi\int_0^{2\pi r} y^2\,dx$$
$$= \pi\int_0^{2\pi} r^2(1-\cos\theta)^2\cdot r(1-\cos\theta)\,d\theta$$
$$= \pi r^3\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^3\,d\theta$$
$$= \pi r^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos\theta+3\cos^2\theta-\cos^3\theta)\,d\theta$$

ここで，　うーん ちょっとメンドウ…

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi. \qquad \int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta = 0$$
$$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = \pi. \qquad \int_0^{2\pi}\cos^3\theta\,d\theta = 0$$

なので，（途中計算は省略します）　え〜っ

$$V_x = \pi r^3(2\pi - 3\cdot 0 + 3\cdot\pi - 0) = 5\pi^2 r^3$$

4　曲線の長さ

曲線の長さの公式を用いるだけです．

▷Point◁（曲線の長さ）

$y = f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ の長さは

$$\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

x と y が媒介変数表示されている場合は，$\alpha \leqq t \leqq \beta$ のとき，

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

解
$\dfrac{dx}{d\theta} = r(1-\cos\theta)$，$\dfrac{dy}{d\theta} = r\sin\theta$ であるから，

$$L = \int_0^{2\pi}\sqrt{r^2(1-\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta}\,d\theta$$
$$= r\int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}\,d\theta$$
$$= r\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos\theta}\,d\theta$$
$$= r\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta$$

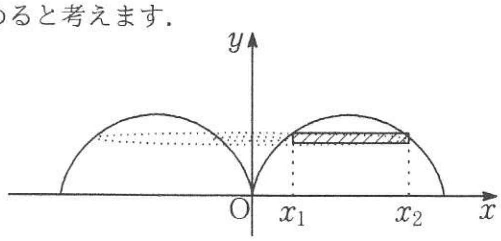
ここが最大のポイント!!
半角の公式
$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$
を使ってます。

$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ では，$\sin\dfrac{\theta}{2} \geqq 0$ なので，

$$L = r\int_0^{2\pi} 2\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta = 2r\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 8r$$

5　y 軸周りの回転体の体積

基本的な考え方は x 軸周りの回転体と同じ．つまり，回転軸に垂直な断面で考えるので，今回の場合，下図の斜線部分を y 軸周りに回転させると考えて，穴あき円板（50円硬貨みたいなもん）を寄せ集めると考えます．



解　曲線 C の
$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の部分を $x = x_1$ $(0 \leqq y \leqq 2r)$．
$\pi \leqq \theta \leqq 2\pi$ の部分を $x = x_2$ $(0 \leqq y \leqq 2r)$
と表すと，求める体積は，$dy = r\sin\theta\,d\theta$ より，

$$V_y = \pi\int_0^{2r}\{(x_2)^2 - (x_1)^2\}\,dy$$
$$= \pi\left(\int_{2\pi}^{\pi} x^2\cdot r\sin\theta\,d\theta - \int_0^{\pi} x^2\cdot r\sin\theta\,d\theta\right)$$
$$= \pi\left(\int_{2\pi}^{\pi} x^2\cdot r\sin\theta\,d\theta + \int_{\pi}^{0} x^2\cdot r\sin\theta\,d\theta\right)$$
$$= \pi\int_{2\pi}^{0} x^2\cdot r\sin\theta\,d\theta$$
$$= \pi\int_{2\pi}^{0} r^2(\theta-\sin\theta)^2\cdot r\sin\theta\,d\theta$$
$$= \pi r^3\int_{2\pi}^{0}\sin\theta(\theta^2 - 2\theta\sin\theta + \sin^2\theta)\,d\theta$$
$$= \pi r^3\int_{2\pi}^{0}(\theta^2\sin\theta - 2\theta\sin^2\theta + \sin^3\theta)\,d\theta$$
$$= 6\pi^3 r^3$$　（これも途中計算は省略します）

✎**注**　この計算はかなりキツイ．エグイ．
一発で合わせるのはほとんど不可能でしょう．
僕は *Mathematica* で計算しました．ごめんね．

ムリっす