このプリントの内容はホンマに大切です。しっかりマスターしよう。

こういう問題が大事なんだよ

そうなん?

入試によく出るでー

面積に関する重要な応用問題を紹介しよう．このような単に面積を求めるだけではない問題が重要です．特に以下の３問は，ある共通の考え方をします．この考え方が入試頻出なんだな．

例題 1.　座標平面上で，原点 O から曲線 $y=\sin x$ へ引いた接線の接点を $\mathrm{T}(\alpha,\ \sin\alpha)$ とする．ただし，$\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$ とする．

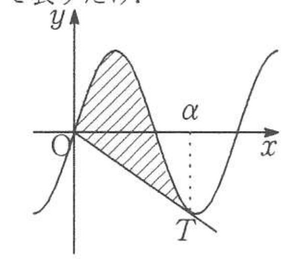
(1) α の満たす方程式を求めよ．

(2) 曲線 $y=\sin x$ と線分 OT で囲まれた部分の面積 S を，$\cos\alpha$ で表せ．

考え方

(1) はまずは T における接線の方程式を求めて，それが原点を通る状況を考えます．

(2) はグラフより２つの関数の上下関係はわかるので面積を求める式は簡単に作れます．あとは正しく計算して，指示通り $\cos\alpha$ を用いて表すだけ．



解　$y=\sin x$ のとき，$y'=\cos x$．

(1) $\mathrm{T}(\alpha,\ \sin\alpha)$ における接線の方程式は，

$$y-\sin\alpha=\cos\alpha(x-\alpha)$$

これが原点を通るので，

$$-\sin\alpha=-\alpha\cos\alpha$$
$$\alpha\cos\alpha=\sin\alpha$$
$$\alpha=\tan\alpha$$

ここで終わってもかまいません

これが α の満たす関係式である．

■

(2) T における接線の方程式は，

$$\begin{aligned} y&=\cos\alpha(x-\alpha)+\sin\alpha \\ &=(\cos\alpha)x-\alpha\cos\alpha+\sin\alpha \\ &=(\cos\alpha)x \end{aligned}$$

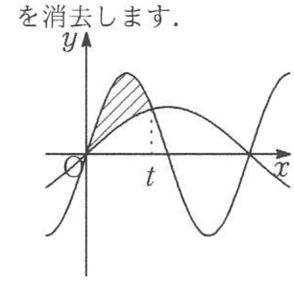
よって，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S&=\int_0^{\alpha}\{\sin x-(\cos\alpha)x\}\,dx \\ &=\left[-\cos x-\frac{\cos\alpha}{2}x^2\right]_0^{\alpha} \\ &=\left(-\cos\alpha-\frac{\cos\alpha}{2}\alpha^2\right)-(-1) \\ &=-\cos\alpha-\frac{\cos\alpha}{2}\tan^2\alpha+1 \\ &=-\cos\alpha-\frac{\cos\alpha}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}-1\right)+1 \\ &=-\frac{1}{2\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{2}+1 \\ &=-\frac{1}{2}\left(\cos\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}\right)+1 \end{aligned}$$

■

例題 2.　$a>0$ とする．曲線 $y=\sin 2x$ $\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を，$y=a\sin x$ が２等分するように定数 a の値を求めよ．

考え方　$y=\sin 2x$ と $y=a\sin x$ の交点 $x=t$ を設定しないと話が始まりませんが，定数 a を求めることが目標なので，最終的には t を消去します．



解　曲線 $y=\sin 2x$ $\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ と x 軸で囲まれた部分の面積は

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx&=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &=\left(-\frac{1}{2}\cos\pi\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)=1 \end{aligned}$$

$y=\sin 2x$ と $y=a\sin x$ との交点の x 座標を $x=t$ とおくと，$\sin 2t=a\sin t$ より，$2\sin t\cos t=a\sin t$．つまり，$\cos t=\frac{a}{2}$．

自分で設定します。

$0<t<\frac{\pi}{2}$ より，$0<\cos t<1$．よって，$0<a<2$．

はーい

$$\int_0^t (\sin 2x - a\sin x)\,dx = 1 \times \frac{1}{2}$$
$$\left[-\frac{1}{2}\cos 2x + a\cos x\right]_0^t = \frac{1}{2}$$
$$-\frac{1}{2}\cos 2t + a\cos t - (-\frac{1}{2} + a) = \frac{1}{2}$$
$$-\frac{1}{2}\cos 2t + a\cos t - a = 0$$
$$-\frac{1}{2}(2\cos^2 t - 1) + a\cos t - a = 0$$

$\cos t = \frac{a}{2}$ を代入 →

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2} - 1\right) + a \times \frac{a}{2} - a = 0$$
$$-\frac{a^2}{4} + \frac{1}{2} + \frac{a^2}{2} - a = 0$$

↑ aだけの式になりました

$$-a^2 + 2 + 2a^2 - 4a = 0$$
$$a^2 - 4a + 2 = 0 \qquad \therefore\ a = 2 \pm \sqrt{2}$$

$0 < a < 2$ より，$a = 2 - \sqrt{2}$

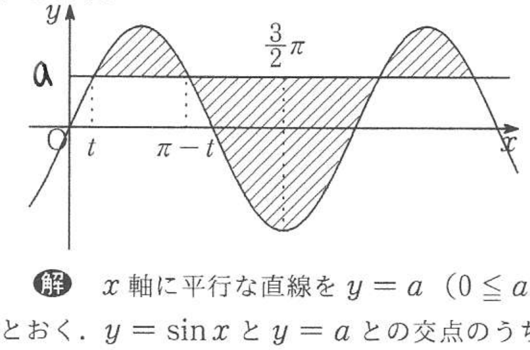
■

➾注　a を求めるのが目的なので，最終的に $\cos t$ を消去し a だけの式になっています．$\cos t$ の力を借りて a を求めることに成功したわけです．交点 t を具体的に決定することはできません．

あらまあ

> 例題 3.　x 軸に平行な直線と曲線 $y = \sin x$ $(0 \leqq x \leqq 3\pi)$ が 4 点で交わるとき，この直線と曲線で囲まれた部分の面積の和が最小となるような直線の方程式を求めよ．

考え方　この問題でも交点を自分で設定する必要があります．なお，面積を計算するときは図の対称性に注意して，少しでも計算の負担が軽くなるようにしよう．



解　x 軸に平行な直線を $y = a$ $(0 \leqq a < 1)$ とおく．$y = \sin x$ と $y = a$ との交点のうち最も x 座標の小さいものを $x = t$ とおく．つまり，

$$a = \sin t, \qquad 0 < t < \frac{\pi}{2}$$

← これも自分で設定します

は～い

このとき，求める部分の面積 S は図の対称性より

$$S = 2\left\{\int_t^{\pi - t} (\sin x - a)\,dx + \int_{\pi - t}^{\frac{3}{2}\pi} (a - \sin x)\,dx\right\}$$
$$= 2\Big[-\cos x - ax\Big]_t^{\pi - t} + 2\Big[ax + \cos x\Big]_{\pi - t}^{\frac{3}{2}\pi}$$
$$= 2\{(-\cos(\pi - t) - a(\pi - t)) - (-\cos t - at)\}$$
$$\quad + 2\left\{\left(\frac{3}{2}\pi a + 0\right) - (a(\pi - t) + \cos(\pi - t))\right\}$$
$$= 2(\cos t - a\pi + at + \cos t + at)$$
$$\quad + 2\left(\frac{3}{2}\pi a - a\pi + at + \cos t\right)$$
$$= 6\cos t + (6t - \pi)a$$

← 今度はtだけの式になりました。

$$= 6\cos t + (6t - \pi)\sin t \ (= f(t) \text{ とおく})$$

$$f'(t) = -6\sin t + 6\sin t + (6t - \pi)\cos t$$
$$= (6t - \pi)\cos t$$

$0 < t < \frac{\pi}{2}$ より $\cos t > 0$．よって，$f'(t)$ の符号変化を調べると，

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
f'		$-$	0	$+$	
f		↘	$3\sqrt{3}$	↗	

よって，$t = \frac{\pi}{6}$ のとき最小値 $3\sqrt{3}$ をとる．
このとき，$a = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$．

■

➾注　この問題では，a を求めるのが目的ですが，交点 t 主体で話を進め，面積も t の関数として考えています．

➾注　例題 2. では $\cos t = \frac{a}{2}$ を利用して $\cos t$ を消去し，面積を a の関数と考えましたが，例題 3. では t を消去できないので，逆に a を消去して t の関数と考えたのです．このように，どの文字をメインにするのかを式の形から見極める必要があります．

自分で考えるのね…

ふ～ん

とても大切 ☆

▷Point◁

> グラフの共有点が具体的に決定できないときは，とりあえず $x = t$ とでも置いておき，そのまま計算を進めていく．最終的に何が必要なのか，どの文字を主体にするのかを見極めて式を変形していく．

☆ ☆

とても大切