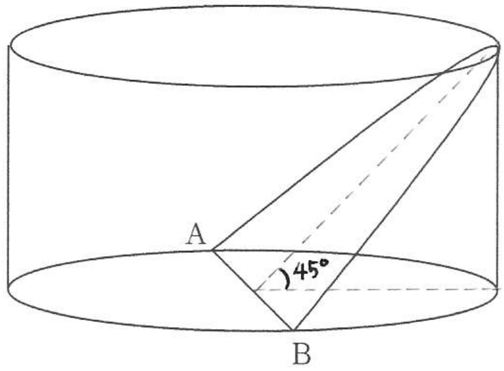
円柱ナナメ切り

次の問題は，古くからある体積計算の本質を学ぶためにとっても重要な問題です．

$\boxed{\text{例 題}}$ 底面の半径が 2，高さも 2 の直円柱がある．この底面の直径 AB を含み，底面と 45° の傾きをなす平面で，直円柱を 2 つの部分に分けるとき，小さい方の立体の体積 V を求めよ．

✎注 右のような立体になります．自力でイメージ（と作図）ができるようにしよう．

はーい



$\boxed{\text{考え方}}$ 立体の体積を求めるには，立体を細かく切ってそれらを寄せ集めるという方法をとります．どの方向に切って考えるか，が勝負の分かれ目ですが，基本的にどのように切っても体積を求めることができます．でも，切る方向によって労力にずいぶん差があります．

せっかくなので，今回の問題では，いろんな方向で切って考えてみましょう．

さてさて，どのように切るのが最適なのでしょうか．

いろんな方向から切って考えることはとてもよい勉強になります。

1　x 軸に垂直に切った場合

図のように座標軸を設定し，x 軸に垂直な面で切ると，断面は直角二等辺三角形になります．

$\boxed{x=t\ \text{で切断}}$したときの断面積を求めてみよう．

まず，円柱を上から眺めると右下の図のようになります．

OP $=t$，OQ $=2$ なので，三平方の定理より，

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{4-t^2}$$

です．また △PQR は直角二等辺三角形なので，

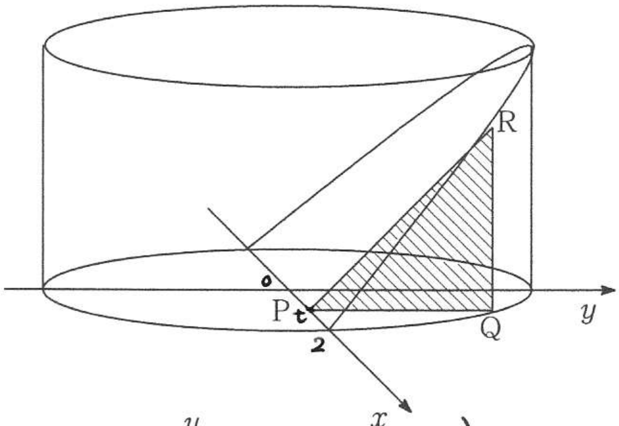
$$\mathrm{PQ}=\mathrm{QR}=\sqrt{4-t^2}$$

です．したがって，△PQR の面積 $S(t)$ は，

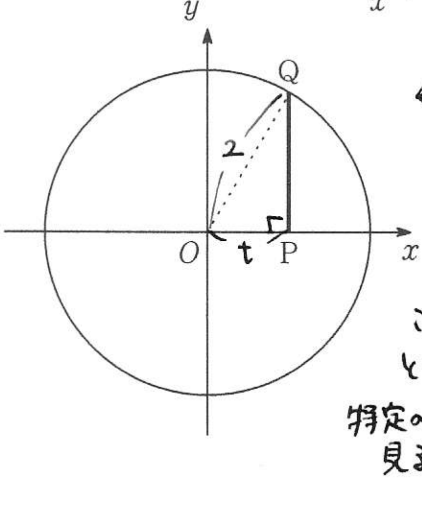
$$S(t)=\sqrt{4-t^2}\times\sqrt{4-t^2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(4-t^2)$$

よって，もとめる立体の体積は，

$$\begin{aligned}V&=\int_{-2}^{2}\frac{1}{2}(4-t^2)\,dt\\&=2\int_{0}^{2}\frac{1}{2}(4-t^2)\,dt\\&=\left[4t-\frac{t^3}{3}\right]_0^2\\&=\frac{16}{3}\end{aligned}$$



上から見ると…



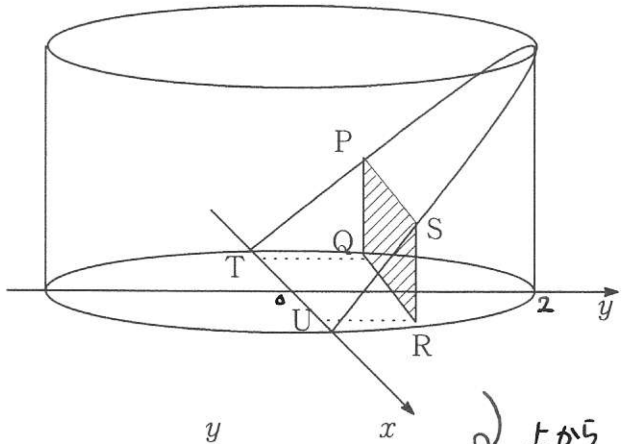
この図のイメージがとても大切です

特定の方向から見るんだね

2　y 軸に垂直に切った場合

先ほどと同じように座標軸を設定し，今度は y 軸に垂直な面で切ってみよう．すると，断面は長方形になります．

$\boxed{y = t \text{ で切断}}$したときの断面積を求めてみよう．



再び，円柱を上から眺めると右下の図のようになります．

したがって，QR の長さは三平方の定理より，

$$\mathrm{QR} = 2\sqrt{4-t^2}$$

いま，△PQT は直角二等辺三角形なので，

$$\mathrm{PQ} = \mathrm{QT} = t$$

です．したがって，長方形 PQRS の面積 $S(t)$ は，

$$S(t) = 2\sqrt{4-t^2} \times t = 2t\sqrt{4-t^2}$$

よって，もとめる立体の体積は，

$$V = \int_0^2 2t\sqrt{4-t^2}\,dt$$

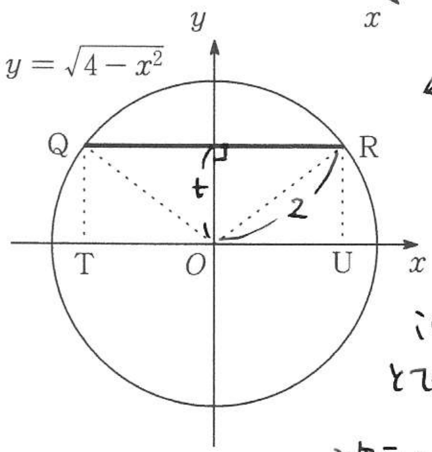
$\sqrt{4-t^2} = s$ と置換すると，$4-t^2 = s^2$ なので，
$-2tdt = 2sds$ であり，

t	$0 \longrightarrow 2$
s	$2 \longrightarrow 0$

なので，

$$\begin{aligned} V &= \int_2^0 s(-2s)ds \\ &= \int_0^2 2s^2\,ds \\ &= \left[\frac{2}{3}s^3\right]_0^2 \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

上から見ると….



この図のイメージがとても大切です。

3次元の立体はイメージしにくいから特定の方向から見て考えるんですね

そうそう

➾**注**　最後の積分計算で置換積分をすることを除けば，考え方において，x 軸で切って考えた場合とほとんど大差ありません．この方法もマスターしておこう．

それにしても
"細かく切ってよせ集める"
という発想だけで
こんな立体の体積が求められるなんて
スゴイと思いませんか？

まあね…