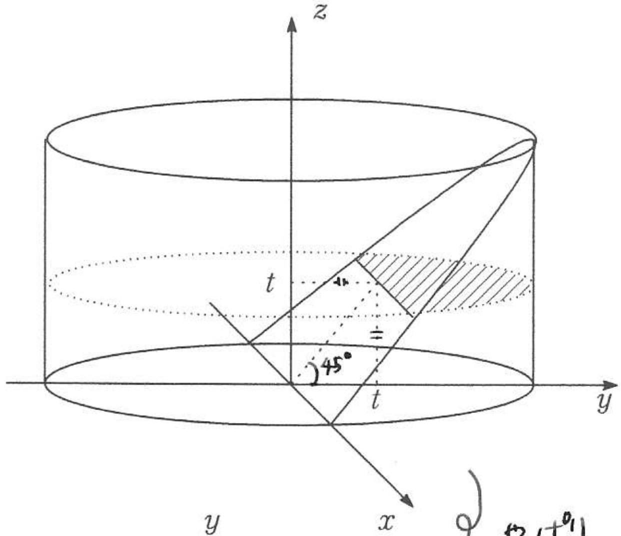
3　z 軸に垂直に切った場合

最後に，底面に平行な面で切って考えてみよう．図のように新たに z 軸を追加設定します．$\boxed{z=t\text{ で切断}}$したときの断面積を求めてみよう．そのときの断面の様子は右下の図のようになります．

この面積を t だけで表すのは困難なので，図のように角 θ を設定します．三平方の定理より

扇形の面積を考えるには，どうしても中心角が必要になるからです。

$$\cos\theta=\frac{t}{2}\quad\cdots\cdots(※)$$



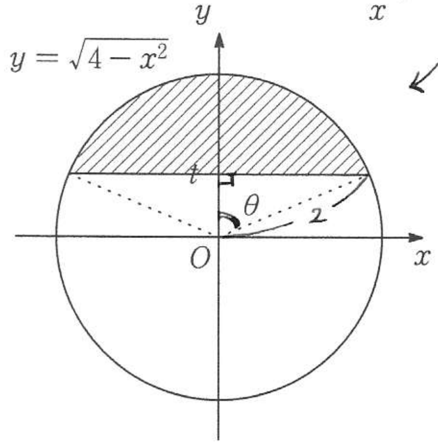
斜線部分の面積は，中心角 2θ の扇形から三角形を引いて求めます．

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot2\theta-\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\sin2\theta=4\theta-2\sin2\theta$$

したがって，求める体積 V は

$$V=\int_0^2(4\theta-2\sin2\theta)\,dt$$

やっぱり上から見た図を考えます。



z=tで切ると，(つまり高さtのとき) 直角二等辺三角形なので切り口のy座標もtになります.

注　断面積が θ で表されていますが，(※）の関係の下で，本来は t の関数なので $S(t)$ としています．よって，積分も t で積分することになります．

(※）より，$-2\sin\theta d\theta=dt$ であり，

t	$0\longrightarrow2$
θ	$\frac{\pi}{2}\longrightarrow0$

なので，

$$V=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(4\theta-2\sin2\theta)(-2\sin\theta)d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(8\theta\sin\theta-4\sin2\theta\sin\theta)d\theta$$

分けて計算します。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\sin\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta(-\cos\theta)'\,d\theta$$
$$=[\theta(-\cos\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos\theta)\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta$$
$$=[\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2\theta\sin\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta$$
$$=\left[\frac{2}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{2}{3}$$

sinθ=sと置換積分しました。

したがって，

$$V=8\times1-4\times\frac{2}{3}=\frac{16}{3}$$

感動…

注　これはかなりキツイ積分を強いられます．それでもきっちり答えが合うのはさすがというもの．やっぱりどの方向から切っても同じ答えになるのですね．

でも，これはやらないほうが無難ですね．素直に x 軸または y 軸に垂直に切るべきでした．

そうやね．

z方向で切るのは大変だけど これはこれで大切な計算方法です。

4　入試問題紹介


ガンバルゾー

円柱をナナメに切った立体の体積の問題は，昔から多くの大学で出題されてきました．なんと京都大学でも 2008 年に出題されています．早速，挑戦してみよう．x 方向，y 方向の 2 通りの方法で解いてみます．


マジ？

2008 年　京都大学（理系）　第 5 問（35 点）

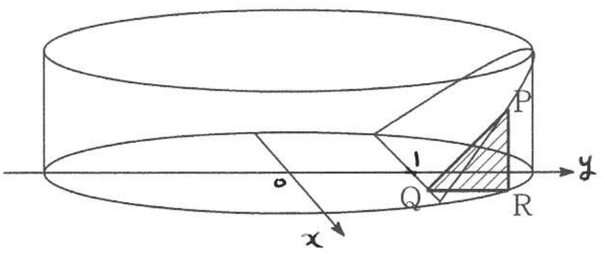
次の式で与えられる底面の半径が 2，高さが 1 の円柱 C を考える．

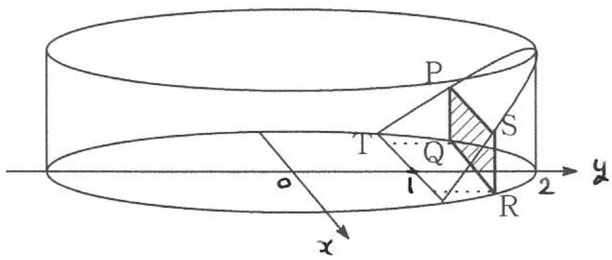
$$C=\{(x,\ y,\ z)\mid x^2+y^2\leqq 4,\ 0\leqq z\leqq 1\}$$

xy 平面上の直線 $y=1$ を含み，xy 平面と 45° の傾きをなす平面のうち，点 $(0,\ 2,\ 1)$ を通るものを H とする．円柱 C を平面 H で二つに分けるとき，点 $(0,\ 2,\ 0)$ を含む方の体積を求めよ．

さっきの問題と
ほとんど同じやん

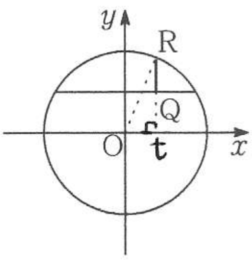

できそう…





$x=t$ で切った断面は直角二等辺三角形で，その一辺の長さは，

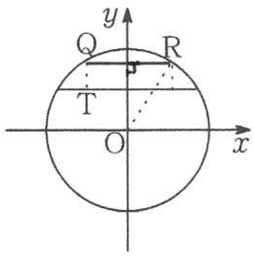
$\mathrm{QR}=\sqrt{4-t^2}-1$



$y=t$ で切った断面は長方形で，その一辺の長さは，

$\mathrm{PQ}=\mathrm{QT}=t-1$

$\mathrm{QR}=2\sqrt{4-t^2}$

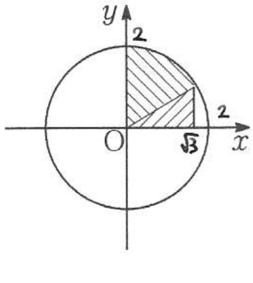


$$\begin{aligned}V&=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{2}\left(\sqrt{4-t^2}-1\right)^2dt\\&=2\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{2}\left(\sqrt{4-t^2}-1\right)^2dt\\&=\int_0^{\sqrt{3}}(4-t^2-2\sqrt{4-t^2}+1)\,dt\\&=\Big[\,5t-\frac{1}{3}t^3\,\Big]_0^{\sqrt{3}}-2\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-t^2}\,dt\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-t^2}\,dt$ は図の斜線部分の面積を表すので，

$\pi\cdot 2^2\cdot\dfrac{1}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

よって，



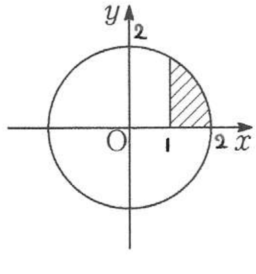
$$V=5\sqrt{3}-\frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{3}-2\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$$

$$\begin{aligned}V&=\int_1^2 2(t-1)\sqrt{4-t^2}\,dt\\&=\int_1^2 2t\sqrt{4-t^2}\,dt-2\int_1^2\sqrt{4-t^2}\,dt\\&=\int_1^2-(4-t^2)'\sqrt{4-t^2}\,dt-2\int_1^2\sqrt{4-t^2}\,dt\\&=\Big[-\frac{2}{3}(4-t^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_1^2-2\int_1^2\sqrt{4-t^2}\,dt\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_1^2\sqrt{4-t^2}\,dt$ は図の斜線部分の面積を表すので，

$\pi\cdot 2^2\cdot\dfrac{1}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，



$$V=2\sqrt{3}-2\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$$

どちらの場合も、最後の積分計算が
ちょっと メンドクサイ だけで、さっきの問題と
あまり 大差ありませんね。

京大でも
こんな問題が
でるのね


ちょっと
安心した。