赤阪正純 (http://inupri.web.fc2.com)

円の面積と楕円の面積

1　円の面積について

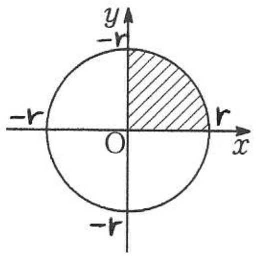
小学校で学習した円の面積の公式を証明しよう.

▷Point◁(円の面積)

> 半径 r の円の面積 S は，円周率を π として,
>
> $$S=\pi r^2$$
>
> で求められる.

考え方

求める図形の面積は図の斜線部分の 4 個分です.



解　$x^2+y^2=r^2 \iff y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ なので，求める図形の面積は，円の上部の式 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ と x 軸とで囲まれた $0 \leqq x \leqq r$ の部分の 4 倍に等しい. よって,

$$S=4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

$x=r\sin\theta$
と置換すると,
$dx=r\cos\theta\,d\theta$

x	0	$\longrightarrow$	r
θ	0	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
S&=4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx\\
&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2-r^2\sin^2\theta}\cdot r\cos\theta\,d\theta\\
&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot r\cos\theta\,d\theta\\
&=4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta\\
&=4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos2\theta}{2}\,d\theta\\
&=4r^2\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&=4r^2\cdot\frac{\pi}{4}\\
&=\pi r^2
\end{aligned}$$

2倍角の公式による次数下げ

小学校時代からの悩みがスッキリしたよ

2　円の面積と円周の長さの関係

言うまでもなく，半径 r の円の面積と円周の長さは

円の面積　$\pi r^2 \xrightarrow{\text{微分}} 2\pi r$　円周の長さ
$\pi r^2 \xleftarrow{\text{積分}} 2\pi r$

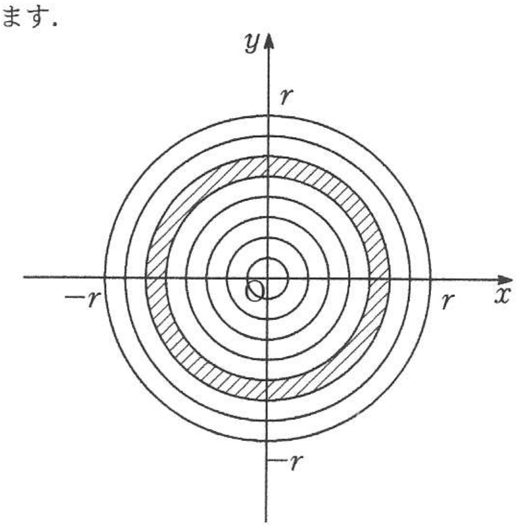
あらためて言われるとそうですねぇ…

ですが，これらがお互い「微分」と「積分」の関係になっていることに気づいていましたか.

なんで？

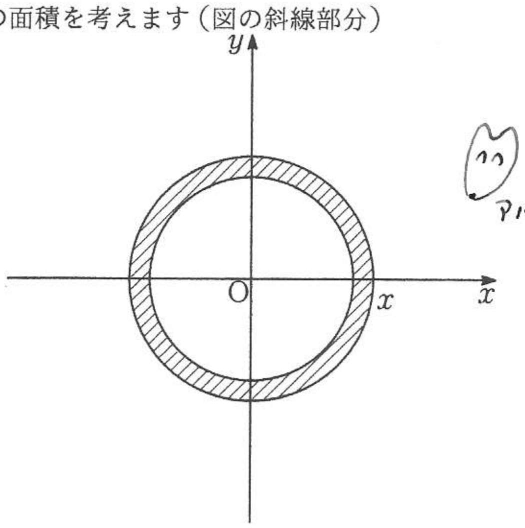
このことは微積分の本質に関わることなので，検証したいと思います. なぜ，円周の長さを積分すると円の面積になるのでしょうか.

円を図のように半径 r の円を同心円に分割します.



目がまわるぅ～

極めて半径の等しい 2 つの同心円で囲まれた部分の面積を考えます (図の斜線部分)

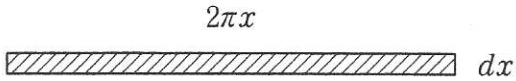


ほっそいドーナツ

アハハ

これを切って広げると,

うわっ
広がった



これは，縦 dx，横 $2\pi x$ の長方形と考えられるので，この部分の面積は

$$2\pi x \times dx$$

したがって，求める円の面積は $0 \leqq x \leqq r$ の寄せ集めだから，

$$\int_0^r 2\pi x\,dx = \Big[\,\pi x^2\,\Big]_0^r = \pi r^2$$

面積の
公式登場
スゲ〜

となります．つまり，

円の面積は円周の長さの寄せ集め

と考えれば，円の面積 πr^2 と円周の長さ $2\pi r$ とがお互いに微分と積分の関係にある理由がわかると思います．

ナットク
したよ

3　楕円の面積

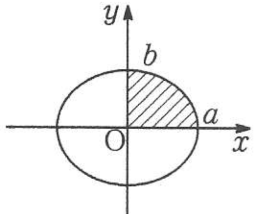
今度は楕円の面積について考えよう．

▷Point◁(楕円の面積)

> 長軸の長さが $2a$，短軸の長さが $2b$ である楕円の面積 S は，円周率を π として，
>
> $$S = \pi ab$$
>
> で求められる(ただし $a > 0$，$b > 0$)．

➾注　$a = b = r$ の場合が「半径 r の円」です．

考え方　楕円の式 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ を考えます．いうまでもなく，図の対称性から第1象限部分の面積を4倍します．



解　$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ より，

$y^2 = b^2 - \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$

よって，$y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ なので，楕円の x 軸よりも上部の式は，$y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

したがって，求める楕円の面積 S は

$$S = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

ここで，$\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ は，原点中心，半径 a の円の面積の $\dfrac{1}{4}$ を表しているから，

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{\pi a^2}{4}$$

$$\therefore\quad S = \frac{b}{a} \times \frac{\pi a^2}{4} \times 4 = \pi ab$$

この結果は
おぼえとこう

■

➾注　楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ は半径 a の円を上下に $\dfrac{b}{a}$ 倍圧縮したもの，と考えれば当然の結果ですね．

> 例題　次の曲線で囲まれた部分の面積を求めよ．
>
> (1) $2x^2 + 3y^2 = 6$　　(2) $3x^2 + 4y^2 = 1$

考え方　いずれも楕円なので先ほどの公式を使えば一発で面積が求められます．

(1) $2x^2 + 3y^2 = 6$ より，$\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{2} = 1$.

よって，$S = \pi \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6}\pi$

(2) $3x^2 + 4y^2 = 1$ より，$\dfrac{x^2}{\frac{1}{3}} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$.

よって，$S = \pi \times \dfrac{1}{\sqrt{3}} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$

しかし，こうしてしまうとちょっと簡単すぎて作問者に申し訳ないので，次のように答案を書くと良いでしょう．(2)だけ紹介します．

解　曲線 $3x^2 + 4y^2 = 1$ は楕円を表している．この楕円の x 軸よりも上部の式は，

$y = \dfrac{1}{2}\sqrt{1 - 3x^2}$.

したがって，求める楕円の面積 S は

$$S = 4\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{2}\sqrt{1 - 3x^2}\,dx$$

$$= 4\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{1}{3} - x^2}\,dx$$

なるほど〜
円の面積に
帰着させるのね

ここで，$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{\frac{1}{3} - x^2}\,dx$ は，原点中心，半径 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ の円の面積の $\dfrac{1}{4}$ を表しているから，

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{\frac{1}{3} - x^2}\,dx = \pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{12}$$

$$\therefore\quad S = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\pi}{12} \times 4 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

■