グラフの書き方(まとめ)

こういうのが欲しかったねん

ヤッター

グラフの書き方をまとめておこう．$y=f(x)$ のグラフを書くときはだいたい次の流れに従います．

▷Point◁($y=f(x)$ のグラフの書き方)

Step ①	まずは定義域を確認する．
Step ②	グラフの対称性を確認する．
Step ③	正確に微分する．
Step ④	y' の符号変化を調べてグラフの増減，極値を確認する．
Step ⑤	y'' の符号変化を調べてグラフ凹凸，変曲点を確認する．
Step ⑥	定義域の端点，特異点などでのグラフの様子を調べる．
Step ⑦	漸近線の有無を確認する．

数Ⅲになるといろいろ大変やなあ…

トクイテンって何ですの

トコロテン?

➾**注**　「毎回これだけ調べるのですか」という声を聞きますが，そんなことありません．精度の高いグラフを書くためにはこれだけのことをしなければならない，というだけです．ザックリとしたグラフでよいなら，定義域と増減だけが分かれば十分です状況に応じて調べる精度を選ぶのです．

よかったー

ちょっと安心したー　いちいち全部やっとれんわ

Step ①　**まずは定義域を確認する．**

ヤッカイなことに定義域は問題文に書かれていないことが多く，関数を見て自分で判断する必要があります．具体的には，(分母) $\neq 0$，(ルートの中) $\geqq 0$，(真数) >0 などの条件から求めます．

【例】　$y=\dfrac{x+1}{(x-2)(x+3)}$ の定義域は $x\neq 2$ かつ $x\neq -3$．

$y=\dfrac{2x}{\sqrt{x-1}}$ の定義域は，$x-1\geqq 0$ かつ $x-1\neq 0$ より，$x>1$．

$y=\log(x^2-1)$ の定義域は，$x^2-1>0$ より，$x<-1,\ 1<x$．

なるほど!!

フムフム

定義域はとっても大切やで

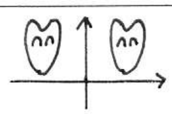
Step ②　**グラフの対称性を確認する．**

意外と見落としがちなのがグラフの対称性．例えばグラフが y 軸対称であることが事前に分かっていれば，$x\geqq 0$ の範囲だけを考えて，$x\leqq 0$ の部分は $x\geqq 0$ の部分をペタンと写せば良いので労力が半減します．

▷Point◁($y=f(x)$ のグラフの対称性)

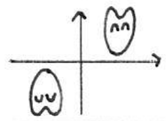
$f(-x)=f(x)$ のとき (x の代わりに $-x$ を代入しても式の形が変わらないとき)，

　⟶　グラフは y 軸対称 (偶関数)



$f(-x)=-f(x)$ のとき (x の代わりに $-x$ を代入すると符号が変わるだけ)，

　⟶　グラフは原点対称 (奇関数)



➾**注**　この対称性 (偶関数と奇関数) については，積分計算の際にもキョーレツに重要になってきます．

【例】　$f(x)=e^{x^2+1}$ は，$f(-x)=e^{(-x)^2+1}=e^{x^2+1}=f(x)$ なので y 軸対称．

$f(x)=\dfrac{x}{x^2+3}$ は $f(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2+3}=-\dfrac{x}{x^2+3}=-f(x)$ なので原点対称．

$y^2=x^2(4-x^2)$ は x の代わりに $-x$，y の代わりに $-y$ を代入しても式は不変なので，

x 軸にも，y 軸にも対称．

Step ③　**正確に微分する．**

微分の基本公式は完璧に憶えていますか．まだまだ微分の計算に不安の残る人が多いです．微分で間違ってしまうと何もかもがパーになるので，とにかく落ち着いて正確に微分してください．

ほとんど関数で合成関数の微分法を用いると思います．「大きく見てザックリ微分し，中身の微分をくっつける」という基本精神を忘れないように．

とにかく正確に微分すること!!　微分でミスるとすべてがパー

はーい

慎重にやりまーす

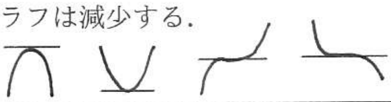
Step ④　y' の符号変化を調べてグラフの増減，極値を確認する．

グラフを書くにあたっての最重要チェック項目．y' の式の中で符号変化に影響のある部分だけを取り出して考えます．簡単には符号変化が分からない場合もあるので，具体例を通してコツをつかもう．

▷Point◁ ($y=f(x)$ のグラフの増減)

$f'(x)>0$ のとき，グラフは増加する．　　$f'(x)<0$ のとき，グラフは減少する．

$f'(x)=0$ のとき，グラフは「山頂」*or*「谷底」*or*「空気いす」



▷Point◁ ($y=f(x)$ のグラフの極値)

$x=\alpha$ の前後で $f'(x)$ の符号が $(+)\longrightarrow(-)$ へと変化するとき，グラフは $x=\alpha$ で極大

$x=\alpha$ の前後で $f'(x)$ の符号が $(-)\longrightarrow(+)$ へと変化するとき，グラフは $x=\alpha$ で極小

Step ⑤　y'' の符号変化を調べてグラフ凹凸，変曲点を確認する．

より精度の高いグラフを書くためには，グラフの凹凸の確認は欠かせません．

▷Point◁ ($y=f(x)$ のグラフの凹凸)

$f''(x)>0$ のとき，グラフは凹

$f''(x)<0$ のとき，グラフは凸

$f''(x)$ の符号が変化する箇所が変曲点．

y' と y'' の符号を合わせて考えることで，グラフの増減の様子をより詳しく知ることができます．

y' の符号	$+$	$+$	$-$	$-$
y'' の符号	$+$	$-$	$+$	$-$
y の増減の様子	↗	↗	↘	↘

Step ⑥　定義域の端点，特異点などでのグラフの様子を調べる．

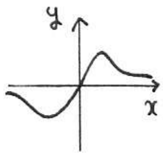
特異点とは，絶対値を含むグラフでよくあるツンツンに尖がった点のことです．

【例】　定義域がすべての実数の場合，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$ や $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)$ を調べる．

定義域が $x>0$ の場合，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)$ を調べる．

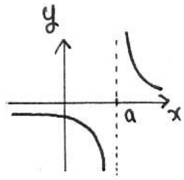
定義域が $x\neq a$ の場合，$\displaystyle\lim_{x\to a+0}f(x)$ や $\displaystyle\lim_{x\to a-0}f(x)$ を調べる．

$\longrightarrow$　いずれの場合も，具体的な関数でその都度考えるべきことです．



$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$



$\displaystyle\lim_{x\to a+0}f(x)=+\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to a-0}f(x)=-\infty$

などなど

Step ⑦　漸近線の有無を確認する．

漸近線については，別紙プリント『漸近線のヒミツ』をよく読んでください．

軸に平行でない漸近線については，あんまり気にする必要はありませんが，次のことだけは憶えておこう．

▷Point◁ (漸近線のカラクリ)

軸に平行でない漸近線をもつ関数は，分数関数 $y=\dfrac{(n+1)\text{ 次式}}{n\text{ 次式}}$ タイプがほとんどである．

($\longrightarrow$ つまり，(分子の次数) $=$ (分母の次数) $+1$ となる場合である．)

このとき，(分子) $\div$ (分母) の割り算を筆算で実行して，$y=(px+q)+\dfrac{(n-1)\text{ 次式}}{n\text{ 次式}}$ と変形することができ，$y=px+q$ が漸近線となる $\left(\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{(n-1)\text{ 次式}}{n\text{ 次式}}=0 \text{ になることがポイント}\right)$．

なお，分数関数 $y=\dfrac{n\text{ 次式}}{n\text{ 次式}}$ タイプ (分母分子の次数が同じ) は x 軸に平行な漸近線をもつ．

定義域が $x\neq a$ の場合，$x=a$ が y 軸に平行な漸近線になる場合が多い．

これは便利な裏ワザや

スゲー

オ〜

【例】　分数関数 $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$ の漸近線について．まず，定義域が $x\neq\pm2$ なので，$x=\pm2$ が漸近線．

また，$y=\dfrac{x^3}{x^2-4}=x+\dfrac{4x}{x^2-4}$ で，$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{4x}{x^2-4}=0$ なので漸近線は $y=x$．

$$\begin{array}{r} x \\ x^2-4\,\overline{)\,x^3} \\ x^3-4x \\ \hline 4x \end{array}$$