『平均値の定理』って，何ですの？

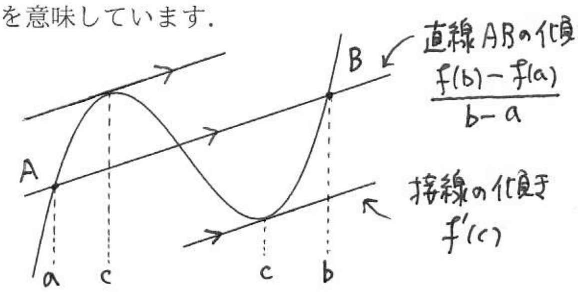
ちょっと待って
ちょっと待って
知りません

はい，『平均値の定理』とは次のような定理です．

▷Point◁(平均値の定理)

> $y = f(x) > 0$ のグラフが，$a \leqq x \leqq b$ で連続，$a < x < b$ で微分可能であるとき，
>
> $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$
>
> をみたすような c が a と b の間に存在する．

図形的には，下図のように「直線ABと平行な接線がAとBの間で最低1本は引ける」ということを意味しています．



✎注　「c って何ですか」という質問を受けますが，わかりません．知りません．ようするに，具体的には何か分からないけど，とにかく a と b の間に少なくとも1個あるということを言っているだけです．

✎注　この平均値の定理は別名「ラグランジュの平均値の定理」と呼ばれています．

『平均値の定理』は『ロルの定理』を用いて証明され，その『ロルの定理』は『連続関数の性質』を用いて証明されますが，この『連続関数の性質』を高校段階で厳密に証明することはできません．つまり，『平均値の定理』を根底から厳密に証明することは高校段階では不可能なのです．

ですから，『平均値の定理』は，証明にはあまり拘らずに「だいたいこんな感じ」程度に意味を理解し，むしろ「何となく使える」ようにするべきです．

『平均値の定理』が有効な代表的な問題を紹介しよう．概ね，次の3つのパターンに集約されます．

▷Point◁(平均値の定理の使用例)

> ① 関数の値の差の因数分解を利用した不等式の証明
>
> ② ハサミウチの定理を利用した極限値計算
>
> ③ 解けない漸化式の極限を求める

① 不等式の証明

『平均値の定理』の式 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ ですが，この形で用いることはほとんどなく，両辺に $b-a$ をかけた式

$$f(b)-f(a) = (b-a)f'(c)$$

の形で用いることが多いです．この式は次のようにイメージできます．

▷Point◁(平均値の定理の別解釈)

> 『平均値の定理』は，関数の値の差 $f(b)-f(a)$ が次のように**因数分解できる**ことを意味している．
>
> $$f(b)-f(a) = (b-a)f'(c)$$
>
> c は a と b の間の数である．

こういう見方もあるのねー
ナルホド〜

そうです．『平均値の定理』とは単なる因数分解の公式なのです．このことを使って，早速，次の問題を解いてみよう．

> **例題 1.**　$\dfrac{1}{e^2} < a < b < 1$ のとき，
>
> $$a-b < b\log b - a\log a < b-a$$
>
> を示せ．

ジ〜ッと見てイメージする
ジ〜ッ

考え方　まずは関数を設定せねばなりませんが，あきらかに $f(x) = x\log x$ とすべきでしょう．このとき，不等式の真ん中の項は $f(b)-f(a)$ と「関数の値の差」になっており，『平均値の定理』を利用した因数分解が利用できます．

つまり，$a < c < b$ なる c を用いて，

$f(b)-f(a) = (b-a)f'(c) = (b-a)(\log c + 1)$

です ($f'(x) = \log x + 1$ より)．

したがって，証明すべき不等式は

$$a-b < (b-a)(\log c + 1) < b-a$$

よって，$b-a > 0$ より，$-1 < \log c + 1 < 1$．つまり，$-2 < \log c < 0$ を証明すれば良いのです．これは $a < c < b$ より明らかです．

逆をたどって証明するための手がかりを見つけたのです

解　$f(x) = x\log x$ とおくと，示す不等式は，

$$a-b < f(b)-f(a) < b-a \quad \cdots(※)$$

フムフム
数学的な考え方です

である．$f'(x)=\log x+1$ なので，『平均値の定理』より

$$f(b)-f(a)=(b-a)(\log c+1) \quad \cdots ①$$

なる c が $a<c<b$ に存在する．

$\dfrac{1}{e^2}<\underbrace{a<b}<1$ より，$\dfrac{1}{e^2}<c<1$ なので，

"c"は
aとbの間に
あります

$$-2<\log c<0$$

よって，$-1<\log c+1<1$ なので，① より，不等式（※）が成立する．

お見事!!
うまい証明や
OK

■

② 極限値の計算

例題 2.　極限値 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\sin x^2}{x-x^2}$ を求めよ．

考え方　$f(x)=\sin x$ とすれば，分子部分は $f(x)-f(x^2)$ と「関数の値の差」になっているので，やはり『平均値の定理』を利用した因数分解に持ち込みます．

つまり，x^2 と x の間の数 c を用いて，

$$f(x)-f(x^2)=(x-x^2)f'(c)=(x-x^2)\cos c$$

となるので，

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\sin x^2}{x-x^2}=\lim_{x\to0}\cos c$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to0}\cos c$ を計算することになります．

解　$f(x)=\sin x$ とする．$f'(x)=\cos x$．『平均値の定理』より，

$$f(x)-f(x^2)=(x-x^2)f'(c)=(x-x^2)\cos c$$

となる c が x^2 と x の間に存在する．このとき，

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\sin x^2}{x-x^2}=\lim_{x\to0}\cos c$$

c は x^2 と x の間に存在するので，$x\longrightarrow0$ のとき，ハサミウチの原理より $c\longrightarrow0$ である．よって，

$$\lim_{x\to0}\cos c=\lim_{c\to0}\cos c=1$$

したがって，求める極限値は 1．

うまいこと
なっとるねー

■

③ 解けない漸化式の極限 参考

※以下の内容はムツカシイので意欲的な人向け．

漸化式で与えられた数列の極限は，その漸化式を解くことができれば，単たる極限の計算問題ですが，漸化式を解くことができない場合，どうすれば良いのでしょうか．

この漸化式は解けません．

例題 3.　$a_1=1$，$a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ が極限値 α をもつと仮定してその値を求め，実際に，$\{a_n\}$ が α に収束することを示せ．

うん
そんな気が
してたよ

解　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$ でもあるから，$a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$ において，$n\longrightarrow\infty$ とすると，

$$\alpha=\sqrt{\alpha+2} \qquad \therefore\ \alpha^2-\alpha-2=0$$

anもan+1も
どっちも同じαに
収束します。

フムフム

$\alpha\geqq0$ なので，$\alpha=2$ である．

次に，$f(x)=\sqrt{x+2}$ とすると，もとの漸化式は $a_{n+1}=f(a_n)$ となる．$\alpha=f(\alpha)$ なので，『平均値の定理』より，

$$a_{n+1}-\alpha=f(a_n)-f(\alpha)=(a_n-\alpha)f'(c)$$

因数分解の
イメージ

となる c（c は a_n と α の間の数）が存在するが，明らかに，$a_n>0$，$\alpha>0$ であるので，$c>0$ であり，

またかよ

$$f'(c)=\frac{1}{2\sqrt{c+2}}<\frac{1}{2\sqrt2}$$

$$|a_{n+1}-\alpha|\leqq\frac{1}{2\sqrt2}|a_n-\alpha|$$

$$\therefore\ |a_n-\alpha|\leqq\frac{1}{2\sqrt2}|a_{n-1}-\alpha|$$

1コ下げる

$$\leqq\left(\frac{1}{2\sqrt2}\right)^2|a_{n-2}-\alpha|$$

もう1コ下げる

$$\leqq\left(\frac{1}{2\sqrt2}\right)^3|a_{n-3}-\alpha|$$

$$\cdots$$

どんどん
下げる

$$\leqq\left(\frac{1}{2\sqrt2}\right)^{n-1}|a_1-\alpha|$$

等比数列の
一般項を
求めるイメージ
ですよ

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\sqrt2}\right)^{n-1}=0$ なので，$n\longrightarrow\infty$ のとき，$|a_n-\alpha|\longrightarrow0$．つまり，$a_n\longrightarrow\alpha$．

これは
ムズイ

■

うへん

注　このタイプの問題は入試では必ず誘導つきで出題され，『平均値の定理』を全く知らなくても数学的帰納法や式変形などで簡単に証明できるようになっているので安心してください．あくまでも『平均値の定理』が問題の背景にある，ということだけ知っていれば十分です．

は-い