ビブン　セキブン　イイキブン〜

微分の本質
『微分』と『積分』の深イイ関係

「『微分』とは何ですか？」と聞かれて「接線の傾きのこと」と答える人，「『積分』とは何ですか？」と聞かれて「微分の反対です」と答える人は多いと思います．確かに，この答えは全く間違いではありませんが，『微分』や『積分』の本当の意味を言い表してはいません．

今回は，『微分』の本質について説明します．$\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ でなぜ dx を両辺にかけて $dy = f'(x)dx$ としてよかったのか，$dy = f'(x)dx$ の意味を理解することが目標です．置換積分で登場した微分形式 $dy = f'(x)dx$ の理解にもつながりますし，『積分』の本質も理解できます．

別に知らなくても高校レベルでは何の問題もありませんが，大学に入ると必ず役に立つ考え方ですので興味ある人は読んでください．どーでもエエ人はスルーして構いません．

う〜ん

どーでもエエけど
気になるから
ちょっとだけ読んでみるわ〜

1　はじめに

いきなりですが，次の質問にどう答えますか？

> **問題** 車が時速 100km で 10 時間走ると何 km 走るか？

エッ？

いきなり
こんな問題？

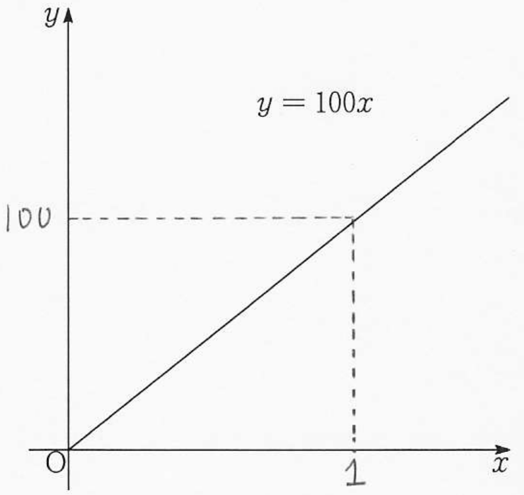
真面目に考えれば「100 × 10 ＝ 1000km」ということになりますが，はたしてそうでしょうか？現実問題として常に時速 100km で 10 時間走り続けることなんて不可能です．信号やカーブもありますし，スタートと同時に時速 100km のスピードなんて出せません．いくらアクセルを踏み込んでもいきなり時速 100km は無理です．また，ガソリンが途中で無くなってスタンドに寄る羽目になるでしょうし，運が悪ければ警察にスピード違反で捕まるかもしれません (笑).

そりゃ そうやわ

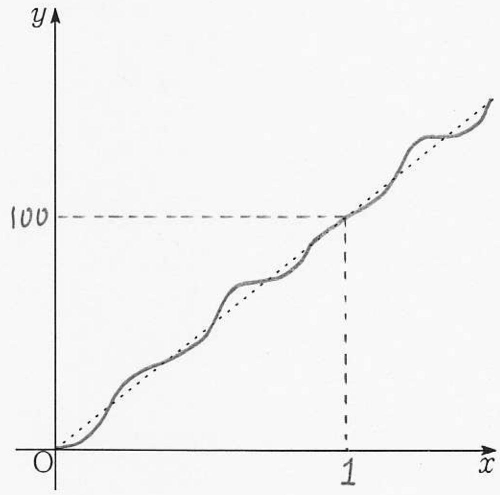
ハハハ…

そもそも時速 100km ってどういう速さなんでしょうか？「1 時間に 100km 走る速さのこと」というなら，実際に 1 時間走ってみないとわからないじゃないですか？ (笑) 時速 100km で走る車の x 時間後の進んだ距離を y とするとき，x と y の関係式を $y = 100x$ とするのは，まさに理想的，空想的な状態の式なのです．実際の時間 x と距離 y の関係はもっと複雑な曲線を描いているはずで，その曲線の各点 x における接線の傾きがその時刻の車の瞬間の速さになっているのです．

理想的な状態



現実的な状態



確かに
現実的には
ウネウネ
曲がってるよな〜

この理想的な直線 (理想的 1 次関数) に，『微分法』の本質が隠されています．

2　そもそも『微分』とは何なのか？

2.1　微分係数 $f'(a)$，導関数 $f'(x)$ の定義

そもそも『微分法』は，関数 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の方程式を求めることから始まりました．しかしながら，曲線上にただ 1 点のみで接する直線を引くことなど現実問題として不可能なので，極限の考えを用いて接線の傾きを定義したのでした．

ちょっと振り返ってみましょう．

まず，関数 $y=f(x)$ 上に点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ と点 $\mathrm{B}(a+h,\ f(a+h))$ をとり，2 点 A，B を通る直線を考えるのでした．直線 AB の傾きは，

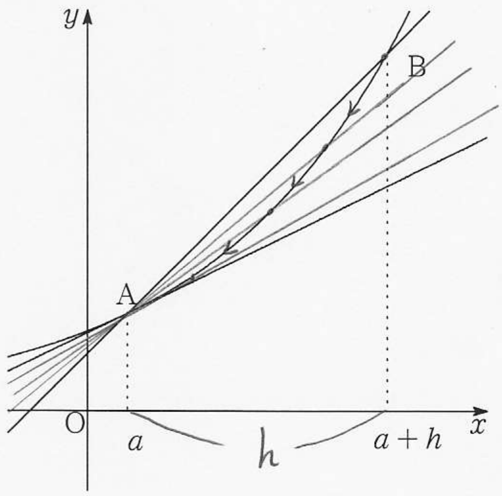
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

です．ここで，点 B を点 A に限りなく近づけていくと，直線 AB は点 A における接線に限りなく近づいていくことがわかると思います．このとき h は 0 に限りなく近づくので，関数 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の傾きは

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

という極限の形で表現されます．

このへんは
よくわかってるよ
OK



点Bが点Aに近づく
⟺ 直線ABが点Aにおける接線に近づく

この極限値を $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における微分係数（または単に $x=a$ における微分係数）とよび，$f'(a)$ で表します

微分係数 $f'(a)$ の a をいろいろと変化させると，関数 $y=f(x)$ 上のいろいろな点における接線の傾きが求められます．つまり，微分係数は a の値によって定まるので，a についての関数とみなすことができ，そこで定数 a を関数としての変数 x でおきかえ，

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

微分係数と導関数を
しっかり区別しよう。
はーい

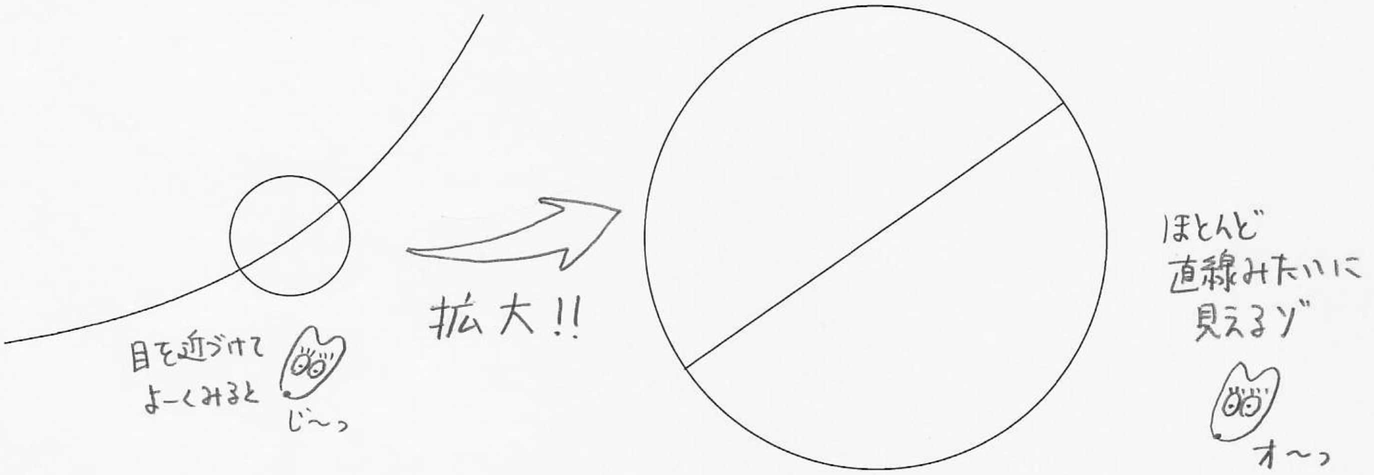
としたものを，関数 $y=f(x)$ の導関数といい，$f'(x)$ を単に y' とかきます．導関数の表し方は他にも，$\dfrac{dy}{dx}$ や $\dfrac{d}{dx}f(x)$ があります．

$\boxed{\text{素朴な疑問}}$　? ? なんで～？

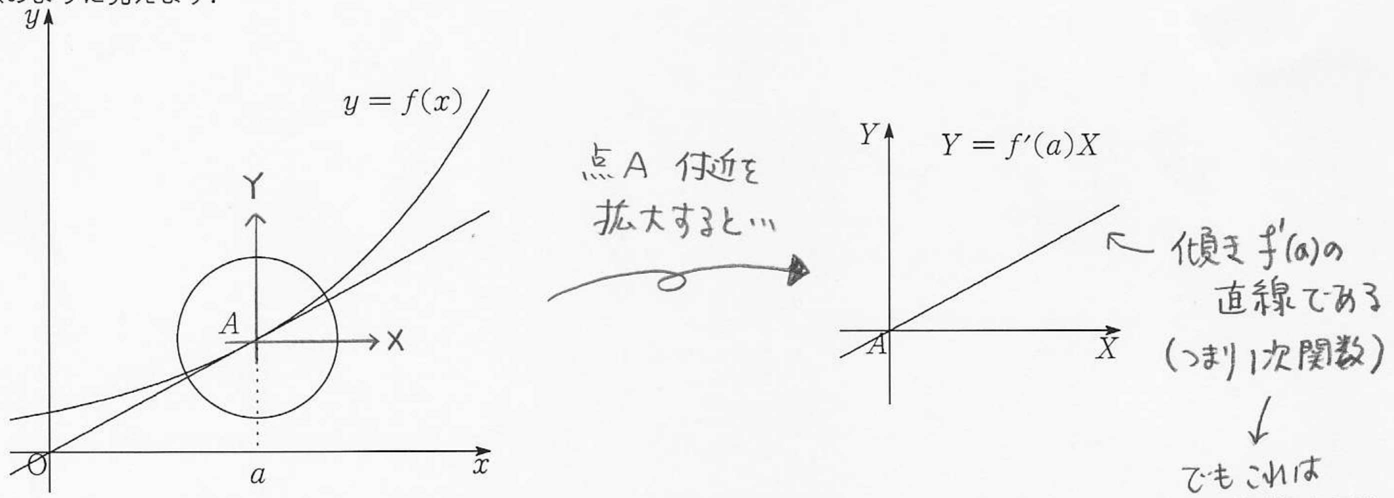
微分係数 $f'(a)$ は，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の傾きを意味していますが，この『微分係数』という単語の中になぜ 係数 という言葉が入っているのでしょうか．また，微分係数のことを古くは『微分商』と呼んでいた時代もあるのですが，なぜ 商 なんて言い方をしたのでしょうか．

2.2 『微分』とは，倍率 ∞ の顕微鏡でみたＳＦ世界の出来事である．

曲線も非常に小さい一部分をとって拡大すれば，直線のように見えます．



したがって，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の傾きが $f'(a)$ であることから，現実的にはありえない話ですが，接点 A の付近を倍率 ∞ の顕微鏡でみると，曲線 $y=f(x)$ は傾き $f'(a)$ の直線のように見えます．



でもこれは
∞倍拡大での
空想世界の話．

そこで，点 A を原点とする仮想的な座標軸（これを X 軸，Y 軸とします）を新たに設定すると，

$$Y=f'(a)X$$

と１次関数的に表記できます．つまり，$f'(a)$ とは仮想世界での１次関数の係数であり，このことが微分係数といわれる所以なのです．

やや唐突な感じもしますが，よくよく考えてみてください．最初に述べたように曲線上の１点で接する直線なんて現実問題として実在しないのです．微分係数 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ も，$h\to 0$ のときに，$f'(a)$ に近づくといっているだけ．つまり，接線や微分係数なんてモノは想像上の産物であり，ＳＦ世界の空想話に過ぎません．だから，『微分』とは現実世界の曲線をＳＦ世界の直線とみなすこと，つまり現実世界の関数を空想上の１次関数で近似することなのです．この意味で『微分とは１次近似である』とも言われることもあります．

何となく言ってることはわかるけど
いまひとつピンとこないなあ…
ふ〜ん

そのうち
わかりますよっ