この空想上の1次関数の傾き $f'(a)$ は a の値によって定まるので，a についての関数とみなすことができます．そこで，定数 a を関数としての変数 x でおきかえます．また，仮想的な座標軸も a の値によって変動するので，X のかわりに dx，Y のかわりに dy として，

$$dy = f'(x)dx$$

お〜っ 有名な形の式が出てきた!!

ここでやっと
登場するのね〜

とします．この近似された理想的1次関数 $dy = f'(x)dx$ のことを $y = f(x)$ の微分と言います．

➾注　dx を x の微分，dy を y の微分といいます．

➾注　『微分係数 $f'(a)$』を『微分商』という理由も納得できるでしょう．

$f'(a) = \dfrac{dy}{dx} (= dy \div dx)$，つまり微分 ($dy$ や dx) の商だからなんですね．

さて，$y = f(x)$ の微分 $dy = f'(x)dx$ に $y = f(x)$ を代入すると，

$$d(f(x)) = f'(x)dx$$

なので，$f(x)$ の微分は $f'(x)dx$ である，といいます．$f(x)$ の微分を単に df とかきます．

なお，このように考えると，x の微分が dx になる理由もはっきりします．つまり，x の微分とは，$x'dx = 1dx = dx$ なのです (y の微分 dy も同様)．

▷Point◁(『微分 (*differential*)』と『微分する (*differentiate*)』の定義)

$y = f(x)$ の『微分 (*differential*)』とは，理想的1次関数 $dy = f'(x)dx$ のことである．
$y = f(x)$ を『微分する (*differentiate*)』とは，$y = f(x)$ から，その微分である $dy = f'(x)dx$ をつくることである．

これが 微分

$$y = f(x) \xrightarrow{\text{微分する}} dy = f'(x)dx$$

理想的1次関数

これが
微分の正体
やったわけか〜

やっと会えた感じ…

つまり，『微分』と『微分する』とは全く異なる概念である．

このように，本来，$y = f(x)$ を『微分する』とは，$y = f(x)$ から，その『微分』$dy = f'(x)dx$ をつくることなのですが，この『微分する』という言い回しは，慣例的に『$\dfrac{dy}{dx}$ つまり $f'(x)$ をつくること』の意味で用いられることが多いので，この慣例に従い『微分する』を次のように定めます．

▷Point◁(慣例としての『微分する』)

$y = f(x)$ の『微分』$dy = f'(x)dx$ の両辺を dx で割って，$\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ と変形することを微分するという

$$y = f(x) \longrightarrow dy = f'(x)dx \xrightarrow{\text{両辺を } dx \text{ で割る}} \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

$$y = f(x) \xrightarrow[\text{微分する}]{} \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

【例】
$x^3 + x^2$ の微分は，$d(x^3 + x^2) = (3x^2 + 2x)dx$
$y = x^3 + x^2$ の微分は，$dy = (3x^2 + 2x)dx$
$y = x^3 + x^2$ を微分すると，$\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 + 2x$

【例】
$\sin x$ の微分は，$d(\sin x) = \cos x\,dx$
$y = \sin x$ の微分は，$dy = \cos x\,dx$
$y = \sin x$ を微分すると，$\dfrac{dy}{dx} = \cos x$

3　微分形式

dx や dy を独立して扱う考え方を「微分形式」といいます (ホントは違うけど). 微分形式の発想を, これまでに学習した様々な微分方法に当てはめてみよう.

3.1　逆関数の微分

【例】　$y = \sqrt{x}$ の微分

$y = \sqrt{x}$ の両辺を 2 乗して, $y^2 = x$.

両辺を『微分』して, $2ydy = dx$. よって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

つまり $y = \sqrt{x}$ を微分した結果に一致します. このような微分の方法を**逆関数の微分**と言いましたが, dx と dy を最初から独立して考えればわざわざ逆関数の微分など意識する必要もありません.

3.2　合成関数の微分

合成関数 $y = g(f(x))$ の微分も, dx と dy を最初から独立して考えると, 全く何の問題もありません.

$y = g(f(x))$ において, $f(x) = t$ とおくと, $y = g(t)$. よって, それぞれの『微分』は

$$dy = g'(t)dt, \qquad dt = f'(x)dx$$

より,

$$dy = g'(t) \cdot f'(x)dx = g'(f(x)) \cdot f'(x)dx$$

よって,

$$\frac{dy}{dx} = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

3.3　媒介変数表示された関数の微分公式

媒介変数表示された関数の微分も, dx と dt, dy と dt を最初から独立して考えると, 全く何の問題もありません. 単なる約分です.

$x = f(t)$ の『微分』は, $dx = f'(t)dt$

$y = g(t)$ の『微分』は, $dy = g'(t)dt$

したがって,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)dt}{f'(t)dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

3.4　陰関数の微分法

陰関数とは, 単純にいうと $y = \cdots\cdots$ の形で書かれていない関数, つまり $F(x,\ y) = 0$ で定められる関数のことです. 通常, この関数を微分するはなかなかややこしいのですが, 微分形式を使いこなせば, 非常に簡単です. まず基本となるのは,

$f(x)$ の『微分』は $f'(x)dx$ である

ということ. 例えば,

$2x^3$ の『微分』は, $(2x^3)'dx = 6x^2dx$

y^{10} の『微分』は, $(y^{10})'dy = 10y^9dy$

となります. 当然, 定数 c の『微分』は 0 です.

あとは, 次の具体例を通して慣れることです.

【例】　$x^2 + y^2 = 1$ のとき, $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

$$d(x^2 + y^2) = 0$$
$$2xdx + 2ydy = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

これら4つの具体例を理解すれば十分です.

【例】　$xy = 1$ のとき, $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

$$d(xy) = 0$$
$$dx \cdot y + x \cdot dy = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

【例】　$y^2 = x^3 + 2x$ のとき, $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

$$d(y^2) = d(x^3 + 2)$$
$$2ydy = 3x^2dx$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}$$

【例】　$x^3y^2 = 1$ のとき, $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

$$d(x^3y^2) = 0$$
$$3x^2dx \cdot y^2 + x^3 \cdot 2ydy = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2y^2}{2x^3y} = -\frac{3y}{2x}$$

dxとdyを独立して考える方が何かとスムーズに話がすすみますよ

早くなれます…

はーい

4　微分と積分の本当の関係

～積分は微分の単なる「逆」なのか？～

例えば，$y = x^3$ の『微分』

$$dy = 3x^2dx$$

の両辺に積分記号 $\int$ を施すと

$$\int dy = \int 3x^2dx$$

となります．両辺をそれぞれ積分計算すると，

$$\int dy = \int 1dy = y$$

$$\int 3x^2dx = x^3$$

もとに もどった!!

オ～ スゲェ～

なので，確かに元の関数 $y = x^3$ に戻ります（積分定数は本質的ではないので省略）．

これまで，$\int 3x^2dx = x^3$ という計算式は「$3x^2$ を x で積分すると x^3 になる」あるいは「微分して $3x^2$ になる関数が x^3 である」と解釈してきましたが，実は，これは積分本来の意味ではありません．

積分記号 $\int$ は，「和」を意味する英単語 *sum* の頭文字が語源であるといわれています．つまり $\int 3x^2dx = x^3$ という計算式は

$3x^2dx$ を寄せ集めれば x^3 になる

ということを意味しているのです．「曲線をＳＦ世界の目で細かく見た『微分』を寄せ集めればもとの曲線に戻る」という極めて当たり前のことを意味しているにすぎません．

『積分』は『微分』の寄せ集め

これが積分本来の意味だったのです．

$\int 3x^2dx$ の意味 → $3x^2$ を $\int$ と dx ではさんでいるのではない!! → $3x^2dx$ を寄せ集めている，と考える

$\boxed{3x^2dx}$ で1つのもんやったってコト

5　参考文献

最近の受験参考書は，マニュアル本のような感じで面白くもなんともないですね．そんな中にあって，数学の本質にこだわった受験参考書として次の３点を挙げておこう．

ナットク!!

そういうことやったんか～

感動したよ．

スッキリ～

・大学への数学シリーズ『解法の探求　微積分』（東京出版）

赤阪が高校時代に愛読した名著．ボロボロになってまだ手元にある（当時のタイトルは『解法の探求 Ⅱ』略して『解探 Ⅱ』と呼ばれていた）．微積分の本質的な考え方をコンパクトにまとめてあるが，今となっては解法がマニアックでかなり難しい．微積分を一通りマスターした数学好きな人向け．

・大学への数学シリーズ『微積分　基礎の極意』（東京出版）

前出の『解法の探求　微積分』の簡易軽量版．こんな本は赤阪の高校時代にはなかったわ（これも時代の流れか）．要点 200 項目と重要問題がコンパクトにまとめてあって，今の高校生にはこれだけで十分だろう．

・参考書『大学への数学 ⅢC』（研文書院）　➾注　雑誌『大学への数学』ではない．

真っ黒い表紙の本格的な参考書．教育課程改編の度にリニューアルされており，最新のものは内容がかなり希薄になった気もするが，それでも質が高い．残念ながら絶版であるが，ネット等で古書を購入することができる．高校微積分の中で最高峰の参考書なのでぜひとも復刊してもらいたい．

また，高校数学から一歩踏み出した専門書も紹介しておこう．これらは高校数学と大学数学の橋渡し的書物で，大学へ行ってからもしばらく使えると思います（大学入試には全く関係ない）．ていうか，こういう書物を読まずに，いきなり大学数学を経験するとワケわかんなくなるでしょうね．

古川昭夫『微積分ノート』（*SEG* 出版）
村上仙瑞『直感でつかむ大学生の微積分』（東京図書）
稲葉三男『微積分の根底をさぐる』（現代数学社）
ポントリャーギン（坂本　實　訳）『やさしい微積分』（ちくま学芸文庫）
森毅『現代の古典解析』（ちくま学芸文庫）
森毅『微積分の意味』（日本評論社）
小林・廣瀬・佐藤『解析序説』（ちくま学芸文庫）