不定積分のコツ

不定積分の問題は，複雑なものはいくらでもつくることができます．しかしながら，あまり現実味のないマニアックな関数の不定積分は，それこそ単なるパズルです．パズルどまりで技巧的な問題（つまり応用価値の低い問題）に悩む必要はありません．僕は，4STEP 問題集の A 問題レベルで十分やと思います．これらの問題を通して，積分計算のコツを紹介していこう．まず，次の 2 つのポイントが重要です．

よかったー
安心したわ
あんなん
ムリやし…

▷Point◁（不定積分計算の心構え）

① 次数を下げる工夫をする．
　⟶ 次数が 1 つ下がるだけで積分計算の負担がかなり軽減されます．とにかく次数にこだわろう．

② 積の形を解消する．
　⟶ 積分は積や商の形に弱いのです．その形をいかに解消するのかがポイント．

1　次数を下げる

1.1　三角関数の次数下げ

三角関数の積分は一番よく登場します．様々な方法がありますが，「次数を下げる」ことを第一に考えよう（いつもそうとは限らないけど）．三角関数の次数下げには 2 倍角の公式や 3 倍角の公式が大活躍します．うるおぼえの人はラストチャンスだと思って，しっかりと憶えてください．

例題 1.　(1) $\displaystyle\int \cos^2\frac{x}{2}\,dx$
　　(2) $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx$

考え方　2 倍角，3 倍角の公式を用いての次数下げです．(1) は，2 倍角の公式 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ より，$\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$．ここで，$\theta = \dfrac{x}{2}$ として，$\cos^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1+\cos x}{2}$．とすればよいのです．(2) は，3 倍角の公式 $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ より，$\sin^3 x = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$ とします．

解

2次　1次

$$\int \cos^2\frac{x}{2}\,dx = \int \frac{1+\cos x}{2}\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C$$

3次　←1次

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\,dx &= \int \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}\,dx \\ &= \int \left(\frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x\right) dx \\ &= -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x + C\end{aligned}$$

■

いずれも次数が
2次→1次，3次→1次に
下がっていることを意識しよう

は〜い

注　(2) は次のようにも計算できます．こちらの方法の方が簡単かもしれませんね．

$\cos x = t$ とおくと，$-\sin x\,dx = dt$ なので，

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\,dx &= \int \sin^2 x \cdot \sin x\,dx \\ &= \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx \\ &= \int (1-t^2)(-dt) \\ &= \int (t^2-1)\,dt \\ &= \frac{1}{3}t^3 - t + C \\ &= \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C\end{aligned}$$

これはこれで
大切な
やり方です

注　この別解を紹介すると，「さっきと答えが違うやんか」と質問に来る人がありますが，3 倍角の公式を代入すれば同じ式であることが確かめられます（積分定数は省略してます）．

ふ〜ん

メンドウなので
確認しませ〜ん

ダメよ〜ダメ・ダメ

1.2　分数関数の分子の次数下げ

例題 2.　(1) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x+1}\,dx$
　　(2) $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+4}{x+2}\,dx$
　　(3) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x-1}\,dx$

分子の次数が
だんだん
上がってますね

フムフム

考え方　分数関数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ においても，分子 $f(x)$ の次数が分母 $g(x)$ の次数よりも大きい場合，割り算 $f(x) \div g(x)$ を実行して分子の次数を下げます．

解 (1) $2x+1=2(x+1)-1$ より,

$$\int \frac{2x+1}{x+1}\,dx$$
$$=\int \left(2-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=2x-\log|x+1|+C$$

2
x+1) 2x+1
2x+2
−1

(2) $x^2+3x+4=(x+2)(x+1)+2$ より,

$$\int \frac{x^2+3x+4}{x+2}\,dx$$
$$=\int \left(x+1+\frac{2}{x+2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2+x+2\log|x+2|+C$$

x+1
x+2) x²+3x+4
x²+2x
x+4
x+2
2

(3) $x^3=x^3-1+1=(x-1)(x^2+x+1)+1$ より,

$$\int \frac{x^3}{x-1}\,dx$$
$$=\int \left(x^2+x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+\log|x-1|+C$$

x²+x+1
x−1) x³
x³−x²
x²
x²−x
x
x−1
1

■

注　それぞれの式変形ですが，サラッとやってるようですが，実際には筆算による割り算をしています．

ok 筆算はオマカセ〜

注　次数下げせずに一気に置換積分に持ち込むことできます．(4) だけやってみます．

解 (4) の別解

$x+2=t$ とおくと，$dx=dt$ なので，

$$\int \frac{x^2+3x+4}{x+2}\,dx$$
$$=\int \frac{(t-2)^2+3(t-2)+4}{t}\,d$$
$$=\int \frac{t^2-t+2}{t}\,dt$$
$$=\int \left(t-1+\frac{2}{t}\right)dt$$
$$=\frac{1}{2}t^2-t+2\log|t|+C$$
$$=\frac{1}{2}(x+2)^2-(x+2)+2\log|x+2|+C$$
$$=\frac{1}{2}x^2+x+2\log|x+2|+D$$

この変形がポイント!!

まあ，できなくはないですが，ちょっとメンドウですね．やっぱり次数下げすべきでした．

そうねぇ たしかに…

2　積の形を解消する

2.1　三角関数の積和公式の利用

例題 3.　(1) $\displaystyle\int \cos 3x\sin 5x\,dx$

(2) $\displaystyle\int \sin 2x\sin 4x\,dx$

(3) $\displaystyle\int \sin x\cos x\sin 2x\,dx$

考え方　いずれも三角関数の積和の公式を利用します．改めて紹介しませんが，完全暗記，または，加法定理を組み合わせてその都度自分で作る，などの方法で正確に導き出せるようにしておいてください．

うーん あの公式キライやねん…

なお，(3) は積和の公式というよりも 2 倍角の公式より，$\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$ となるはあきらかですが，ゴーインに積和の公式とみなすこともできなくはありません．

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\{\sin(x+x)+\sin(x-x)\}$$
$$=\frac{1}{2}\sin 2x$$

この関係を繰り返し用いて積の形を解消していきます．

解

(1) $\displaystyle\int \cos 3x\sin 5x\,dx$

$$=\int \frac{1}{2}\{\sin(5x+3x)+\sin(5x-3x)\}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int(\sin 8x+\sin 2x)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8}\cos 8x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C$$
$$=-\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$$

微分してもどるか必ず確認

(2) $\displaystyle\int \sin 2x\sin 4x\,dx$

$$=\int -\frac{1}{2}\{\cos(4x+2x)-\cos(4x-2x)\}\,dx$$
$$=-\frac{1}{2}\int(\cos 6x-\cos 2x)\,dx$$
$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\sin 6x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C$$
$$=-\frac{1}{12}\sin 6x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

微分してもどるか必ず確認

注　この問題は 2 倍角の公式をうまく利用して置換積分で処理することもできます．

ほ〜っ そうですかっ