解（別解）2倍角の公式より，

$$\int \sin 2x \sin 4x\, dx$$
$$= \int \sin 2x(2\sin 2x \cos 2x)\, dx$$

$\sin 2x = t$ とおくと，$2\cos 2x dx = dt$ より，

$$(\text{与式}) = \int t^2\, dt$$
$$= \frac{1}{3}t^3 + C$$
$$= \frac{1}{3}\sin^3 2x + C$$

これは見事なチカンぶり!!
オ〜っ

✎注　この結果が先ほどの結果と一致していることの確認は各自への宿題としておきましょう．

(3) $\displaystyle\int \sin x \cos x \cos 2x\, dx$

$$= \int \frac{1}{2}\sin 2x \cos 2x\, dx$$
$$= \int \frac{1}{4}\sin 4x\, dx$$
$$= -\frac{1}{16}\cos 4x + C$$

2倍角の公式 1回目
2倍角の公式 2回目

✎注　この問題もうまい別解があります．

解（別解）

$\cos x = t$ とおくと，$-\sin x dx = dt$ より，

$$(\text{与式}) = \int \sin x \cos x \cos 2x\, dx$$
$$= \int \sin x \cos x(2\cos^2 x - 1)\, dx$$
$$= \int -t(2t^2 - 1)\, dt$$
$$= -\frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{2}t^2 + C$$
$$= -\frac{1}{2}\sin^4 x + \frac{1}{2}\sin^2 x + C$$

このsin xが1つだけ余っていることに注目します

✎注　この結果が先ほどの結果と一致していることの確認は各自への宿題としておきましょう．

2.2　部分分数に分ける

分数関数の積分で，特に分母が複数の関数の積になっている場合，**部分分数分解**という手法がよく用いられます．この手法は，『数列』分野で分数型の数列の和を求めるときにすでに登場しましたが，積分における部分分数分解は．ちょっと分け方が違います．数列の場合は，あくまでも和を求めることが目的だったため，とにかく差の形を作り出す必要がありましたが（ナナメが打ち消し合うから），積分では必ずしも差の形に分ける必要はありません．積分できさえすれば良いのです．とにかく分ける！

▷Point◁
☆部分分数に分ける方法☆
→ カンでテキトーに分けて，あとから微調整

カンはさえてるでー OK オマカセ!!

です．とにかく思い切って分けてみるだけです．

✎注　『数列』分野における部分分数分解については，別プリント「部分分数に分けよう」を参照のこと．

まずは，具体例で学ぼう．

例題 4.　(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x+2)}\, dx$
(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4}\, dx$
(3) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)(2x-1)}\, dx$

考え方　このように分母が1次式2つの積の場合は，『数列』分野の部分分数分解と同様のノリでできます．

解

(1) $\displaystyle\frac{1}{x(x+2)} = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right) \times \frac{1}{2}$ より，

テキトーに分けて… 微調整!!

$$\int \frac{1}{x(x+2)}\, dx = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right)\, dx$$
$$= \frac{1}{2}(\log|x| - \log|x+2|)$$
$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{x}{x+2}\right| + C$$

ようするに分母の積を解消してるんだね
そーゆーこと!!

(2) $\displaystyle\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x+2)(x-2)}$
$\displaystyle= \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right) \times \frac{1}{4}$ より，

テキトーに分けて… 微調整!!

$$\int \frac{1}{x^2-4}\, dx = \int \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)\, dx$$
$$= \frac{1}{4}(\log|x-2| - \log|x+2|)$$
$$= \frac{1}{4}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$

(3) $\dfrac{x}{(x-1)(2x-1)}=\underbrace{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{2x-1}}$ より，

$\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}=\dfrac{B-A}{AB}$ という式をイメージしよう

$$\int\frac{x}{(x-1)(2x-1)}\,dx$$
$$=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2x-1}\right)dx$$
$$=\log|x-1|-\frac{1}{2}\log|2x-1|+C$$
$$=\frac{1}{2}(2\log|x-1|-\log|2x-1|)+C$$
$$=\frac{1}{2}\log\frac{(x-1)^2}{|2x-1|}+C$$

この変形はなかなか思いつかないよ

う～ん

分母の $x-1$ と $2x-1$ の差が分子の x に等しいことを見抜こう

う～ん

注　このように分母が 1 次式 2 つの積の場合は，あんまり何も考えずにテキトーに分けても何とかなるんですが，分母が (2 次式)×(1 次式) など，複雑になってくると分けるのもかなり困難になります．この問題は後ほど解説します．

別にやらなくていいよ・・・

3　その他の不定積分

もう少しだけ解説しときます．

例題 5.
(1) $\displaystyle\int(e^x+e^{-x})^3\,dx$
(2) $\displaystyle\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2dx$
(3) $\displaystyle\int\frac{\sin^2x}{1-\cos x}\,dx$
(4) $\displaystyle\int\left(\tan^2x+\frac{1}{\tan^2x}\right)dx$

解

(1) 「$e^x=t$ と置換しようかな，それとも $e^x+e^{-x}=t$ と置換するのかな」と思うのですが，そんなことしなくても普通に展開すれば大丈夫です．3 乗の展開，指数計算を間違わないように．

$$\int(e^x+e^{-x})^3\,dx$$
$$=\int(e^{3x}+3e^{2x}e^{-x}+3e^xe^{-2x}+e^{-3x})\,dx$$
$$=\int(e^{3x}+3e^x+3e^{-x}+e^{-3x})\,dx$$
$$=\frac{1}{3}e^{3x}+3e^x-3e^{-x}-\frac{1}{3}e^{-3x}+C$$

それだけのことか・・・

メンドクさ～

(2) これも，アレコレ考えるより普通に展開するだけ．2 倍角の公式の利用します．

$$\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2dx$$

2倍角の公式をイメージしよう

$$=\int\left(\sin^2\frac{x}{2}+\underbrace{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx$$
$$=\int(1+\sin x)\,dx=x-\cos x+C$$

(3) まあ，普通に考えればこうするしかないでしょう．

$$\int\frac{\sin^2x}{1-\cos x}\,dx$$
$$=\int\frac{1-\cos^2x}{1-\cos x}\,dx$$
$$=\int\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{1-\cos x}\,dx$$
$$=\int(1+\cos x)\,dx$$
$$=x+\sin x+C$$

なかなかうまい変形やなあ

うん

(別解)　分母分子に $1+\cos x$ をかけてもできます．まあ，同じことですが．

$$\int\frac{\sin^2x}{1-\cos x}\,dx$$
$$=\int\frac{\sin^2x(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}\,dx$$
$$=\int\frac{\sin^2x(1+\cos x)}{1-\cos^2x}\,dx$$
$$=\int\frac{\sin^2x(1+\cos x)}{\sin^2x}\,dx$$
$$=\int(1+\cos x)\,dx$$
$$=x+\sin x+C$$

(4) $\tan x$ がらみの不定積分はなかなかクセがあるんですが，$\tan x$ のままで処理することはマレで，$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ または $1+\tan^2x=\dfrac{1}{\cos^2x}$ などをつかって，$\sin x$ や $\cos x$ の世界に戻って考えることが多いようです．今回の場合も絶妙な対称性をもっているので・・・

$$\int\left(\tan^2x+\frac{1}{\tan^2x}\right)dx$$
$$=\int\left(\frac{\sin^2x}{\cos^2x}+\frac{\cos^2x}{\sin^2x}\right)dx$$
$$=\int\left(\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}+\frac{1-\sin^2x}{\sin^2x}\right)dx$$
$$=\int\left(\frac{1}{\cos^2x}-1+\frac{1}{\sin^2x}-1\right)dx$$
$$=\tan x-\frac{1}{\tan x}-2x+C$$

実に美しい!!

お見事!!

注　$\displaystyle\int\frac{1}{\sin^2x}\,dx=-\frac{1}{\tan x}+C$ は公式でしたね．コレ，忘れたころにやってくるんですよ．

おぼえとこ

完全に忘れてたわ