不等式を面積で証明するなんて，ス・テ・キ

積分 Love♡

「次の不等式を証明せよ」という問題にこれまで何度も出会ったことがあると思います．証明には様々な手法がありましたが（いくつか思い出せますか？），今回は定積分を用いて証明するという感動的な手法を紹介します．

例題 $a>0$ とする．次の不等式を証明せよ

$$\frac{1}{a+1}<\log(a+1)-\log a<\frac{1}{a}$$

イメージしよう

うーん

考え方 「$\log(a+1)-\log a$」を見て，何か感じることはないですか？つまり，

$$\log(a+1)-\log a=\Big[\log x\Big]_a^{a+1}=\int_a^{a+1}\frac{1}{x}\,dx$$

と解釈すれば，$\log(a+1)-\log a$ とは，$y=\dfrac{1}{x}$ のグラフの $x=a$，$x=a+1$，x 軸で囲まれた部分の面積を表しています．このことに気づくと，この不等式が全く新しい視点で眺めることができるでしょう．

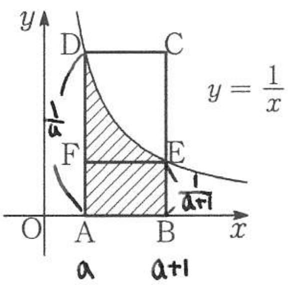
ナルホド〜

解 $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを考える．

A$(a,\ 0)$，

B$(a+1,\ 0)$

とし，点 C，D，E，F を図のように定める．



図より，

四角形 ABEF ＜ 斜線部分の面積 ＜ 四角形 ABCD

斜線部分の面積は

$$\int_a^{a+1}\frac{1}{x}\,dx=\Big[\log x\Big]_a^{a+1}=\log(a+1)-\log a$$

$AB=1$，$AF=\dfrac{1}{a+1}$，$AD=\dfrac{1}{a}$ なので，

四角形 ABEF$=\dfrac{1}{a+1}$，四角形 ABCD$=\dfrac{1}{a}$．

よって，

$$\frac{1}{a+1}<\log(a+1)-\log a<\frac{1}{a}$$

が成立する．

■

これはスゴい

うまいこと なってるなー

例題 $a<b$ とする．次の不等式を証明せよ

$$e^a<\frac{e^b-e^a}{b-a}<e^b$$

考え方 $b-a>0$ なので不等式の各項に $b-a$ をかけた式

$$(b-a)e^a<e^b-e^a<(b-a)e^b$$

を考えよう．e^b-e^a を

$$e^b-e^a=\Big[e^x\Big]_a^b=\int_a^b e^x\,dx$$

と解釈すれば，e^b-e^a とは，$y=e^x$ のグラフの $x=a$，$x=b$，x 軸で囲まれた部分の面積を表しています．このことに気づくと，この不等式が全く新しい視点で眺めることができるでしょう．

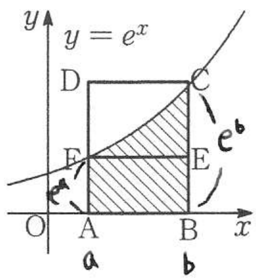
うん

解 $y=e^x$ のグラフを考える．

A$(a,\ 0)$，

B$(b,\ 0)$

とし，点 C，D，E，F を図のように定める．



図より，

四角形 ABEF ＜ 斜線部分の面積 ＜ 四角形 ABCD

斜線部分の面積は

$$\int_a^b e^x\,dx=\Big[e^x\Big]_a^b=e^b-e^a$$

$AB=b-a$，$AF=e^b$，$AD=e^a$ なので，

四角形 ABEF$=(b-a)e^b$，

四角形 ABCD$=(b-a)e^a$．よって，

$$(b-a)e^b<e^b-e^a<(b-a)e^a$$

が成立する．

■

あまりの素晴らしさに感動しました

例題 次の不等式を証明せよ

$$\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n} < 1 + \log n$$

ちょっと ムズそう… うーん

考え方 まずは「グラフの面積を利用して証明しよう」と思わなければなりません．では，どんなグラフをイメージするのか．ヒントは一番最初に紹介した **例題** にあります．$\log n$ や $\log(n+1)$ を見て「$y = \dfrac{1}{x}$ の面積が関係あるのでは」と考えます．そして不等式の中央部分の形を見て，「これが横の長さ 1 の長方形の面積（の総和）を表しているのではないかな」と考えます．そうすれば関数 $y = \dfrac{1}{x}$ を連想するのは当然なことといえます．この思考方法はとても重要です．

なれてくれば すぐに イメージ できるようになるよ

解

右図より，斜線部分の面積は長方形の面積の総和よりも小さい．斜線部分の面積は

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\log|x|\Big]_1^{n+1} = \log(n+1)$$

長方形の面積の総和は

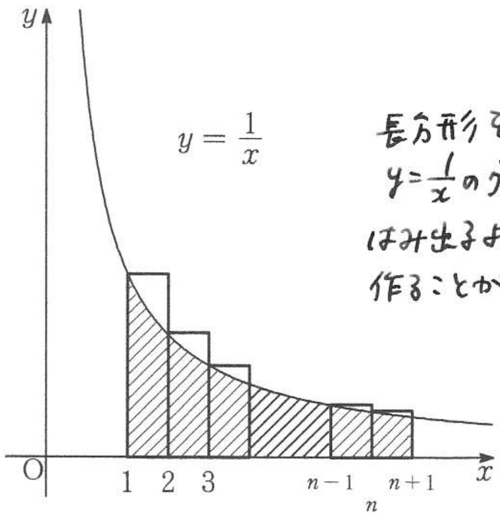
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n}$$

したがって，

$$\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n}$$

が成立する．

スゲ〜 一発で証明できた!!



長方形を $y=\frac{1}{x}$ のグラフの上に はみ出るように 作ることが ポイント!!

なるほど!!

たのしー　ヤッホーイ　面積サイコー 積分サイコー

右図より，網目部分の面積は長方形の面積の総和よりも大きい．

網目部分の面積は，$n > 1$ のとき，

$$\int_1^{n} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\log x\Big]_1^{n} = \log n$$

長方形の面積の総和は

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n}$$

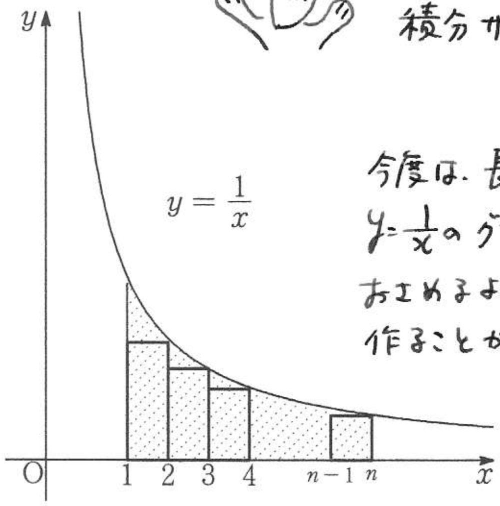
したがって，$n > 1$ のとき，

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n} < \log n$$

両辺に 1 を加えて

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n} < 1 + \log n$$

この不等式は $n = 1$ のときも成立する．



今度は，長方形を $y=\frac{1}{x}$ のグラフの下に おさめるように 作ることが ポイント!!

フムフム

不等式の向きを考えて 長方形の作り方をイメージします

注 最初の **例題** で紹介した不等式 $\dfrac{1}{a+1} < \log(a+1) - \log a < \dfrac{1}{a}$ は上の図の 1 個分の区間 $(a \leqq x \leqq a+1)$ に注目していたわけです．基本的な考え方は同じです．