例題 次の不等式を証明せよ

$$2(\sqrt{n+1}-1) < 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} \leqq 2\sqrt{n}-1$$

どんなグラフを
イメージするんかなー？
えーっと…

考え方 まずは「グラフの面積を利用して証明しよう」と思わなければなりません．では，どんなグラフをイメージするのか．不等式の中央部分の形を見て，「これが横の長さ 1 の長方形の面積の総和を表しているのではないかな」と考えて，関数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ を連想するのです．この思考方法はとても重要です．

OK

解

右図より，斜線部分の面積は長方形の面積の総和よりも小さい．斜線部分の面積は

$$\int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\Big[\,2\sqrt{x}\,\Big]_1^{n+1}=2(\sqrt{n+1}-1)$$

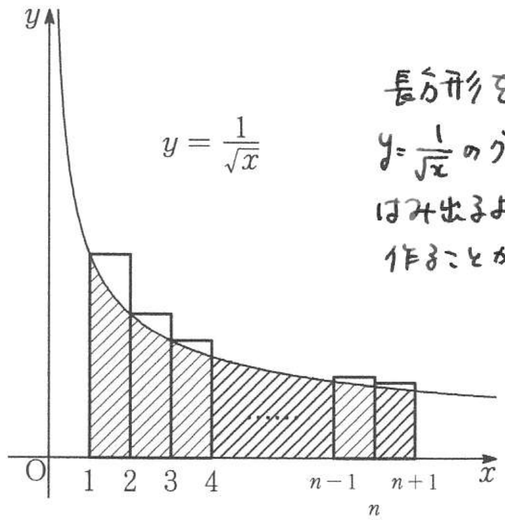
長方形の面積の総和は

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

したがって，

$$2(\sqrt{n+1}-1) < 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

が成立する．



長方形を
$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ のグラフの上に
はみ出るように
作ることがポイント!!

OK

ヤッホーイ
面積サイコー
積分サイコー

右図より，網目部分の面積は長方形の面積の総和よりも大きい．

網目部分の面積は，$n>1$ のとき，

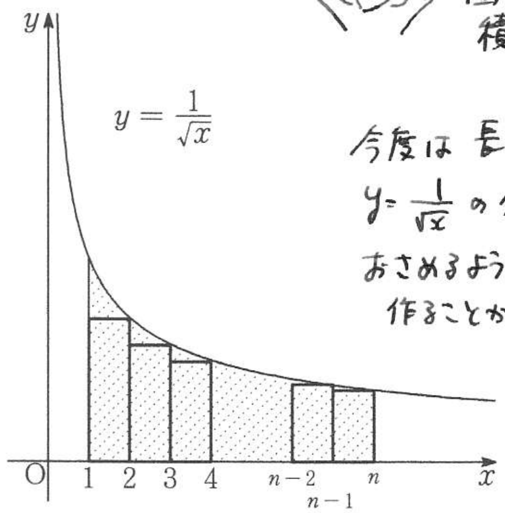
$$\int_1^{n}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\Big[\,2\sqrt{x}\,\Big]_1^{n}=2\sqrt{n}-2$$

長方形の面積の総和は

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

したがって，$n>1$ のとき，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}-2$$



今度は長方形を
$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ のグラフの下に
おさめるように
作ることがポイント!!

納得!!

両辺に 1 を加えて，

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}-1$$

この不等式は $n>1$ で成立するが，$n=1$ のとき，(左辺) = (右辺) = 1 なので，

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} \leqq 2\sqrt{n}-1$$

とすれば，この不等式は $n=1$ でも成立する，つまり全ての自然数 n で成立する．

最後に，次のポイントはほとんど明らかなこととして納得できるでしょう．

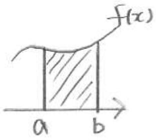
それにしても
実にうまいこと
なってるよなあ…

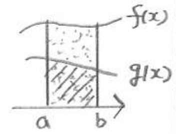
感動したよ

おまけ
東大 1990年
前期 理系 $\boxed{1}$ の問題を
みといて～

▷Point◁

$a \leqq x \leqq b$ において，$f(x) \geqq 0$ ならば，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqq 0$ が成立する．
等号は常に $f(x) = 0$ であるときに限って成り立つ．





$a \leqq x \leqq b$ において，$f(x) \geqq g(x)$ ならば，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx$ が成立する．
等号は常に $f(x) = g(x)$ であるときに限って成り立つ．

面積をイメージすればあたりまえ〜

ナットク!!

✏注 等号成立の条件に注意しよう．最初の等号成立条件「$f(x) = 0$」は方程式ではなく恒等式です．$f(x)$ が式として 0 に等しいということを意味しています．つまり「$f(x) = 0$」とは「$y = 0$」，すなわち $y = f(x)$ のグラフが x 軸に一致していることを意味しています．だから等号が成立する（面積が 0 になる）のは当たり前のことです．後半の等号成立条件も同じような感じ．**式として一致する**ということ．

例題 $0 < x < \dfrac{1}{2}$ のとき，不等式 $\sqrt{1-x} < \sqrt{1-x^3} < 1$ が成立することを利用して，

$$\frac{1}{2} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} < 2-\sqrt{2}$$

を示せ．

考え方 パッと見て目につくのは不等式の中央部分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ です．$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^3}}$ を 0 から $\dfrac{1}{2}$ まで積分するわけです．与えられた不等式を利用せよということですから …

解 不等式の各項は正なので逆数をとると，$1 < \dfrac{1}{\sqrt{1-x^3}} < \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$．よって，

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 1\,dx < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\,dx < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 1\,dx = \Big[\,x\,\Big]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \Big[-2\sqrt{1-x}\Big]_0^{\frac{1}{2}} = 2-\sqrt{2}$$

よって，$\dfrac{1}{2} < \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} < 2-\sqrt{2}$．

✏注 与えられた不等式をそのまま機械的に定積分するだけのツマラナイ問題でしたが，その背景に上のポイントがあることを意識してください．

なお，どうがんばったって真ん中の定積分を計算することはできないのでご注意を．

例題 次の不等式を示せ．

$$\frac{\pi}{2} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}} < \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

考え方 さっきはヒントとなる不等式が与えられていて，それを機械的に積分すれば証明できたのですが，今回は何もありません．ということは自分で不等式を作り出さないといけないのです．とは言うものの全く何の手がかりもない雲を掴むような話ですが，ここは数学の問題ですから，**常識の範囲内でうまくいくように作ってあるわけです．**

解 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき $0 \leqq \sin x \leqq 1$ なので，$0 \leqq \sin^2 x \leqq 1$．よって $-\dfrac{1}{2} \leqq -\dfrac{1}{2}\sin^2 x \leqq 0$．

$$\frac{1}{2} \leqq 1-\frac{1}{2}\sin^2 x \leqq 1.$$

√ をつけて

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x} \leqq 1.$$

逆数にする

$$1 \leqq \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}} \leqq \sqrt{2}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\,dx$$

単なる計算　　　　単なる計算

$$\therefore\ \frac{\pi}{2} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}} < \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

✏注 言われてみれば「なぁ〜んだ，それだけのことか」って感じですが，難しく感じてしまいますね．さりげなく等号が消えているのはなぜでしょうか？各自で考えてね．なお，これも真ん中の積分を計算することはできませんよ．