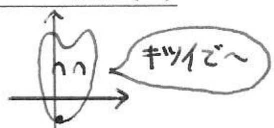
軸をまたぐとキツイなあ



x 軸や y 軸をまたいでいる図形を，軸の周りに回転させてできる立体の体積を求めるのは，かなりメンドウです．出来上がる立体をイメージすればわかりますが，結局のところ，軸の片側部分をもう片側へ折り上げた図形を回転することになります．図がかなり複雑になるので計算が大変．少しでも楽をするために，対称性を意識したり，円錐の体積をうまく利用するなどの工夫を心がけましょう．

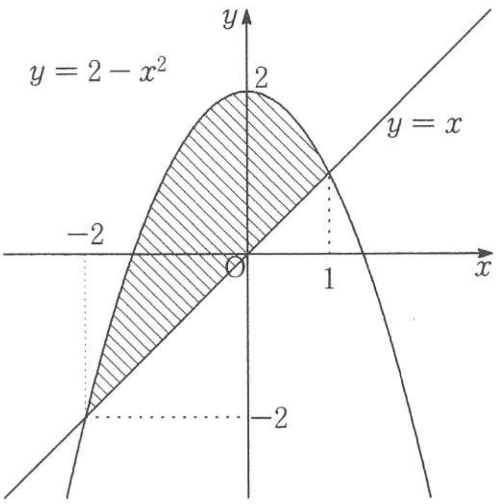
例題　$y=2-x^2$ と $y=x$ で囲まれた部分について，

(1)　y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V_y を求めよ．

(2)　x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V_x を求めよ．

考え方　2 曲線の位置関係や交点などは問題ないでしょう．今回の場合，囲まれた部分が x 軸や y 軸をまたいでいます．ということは，回転させた場合に注意が必要で，単純に式をそのまま積分するわけには行きません．

頭の中で回転させて立体をイメージして，結局，どの部分を回転させたものになるのかを自分で把握せねばなりません．



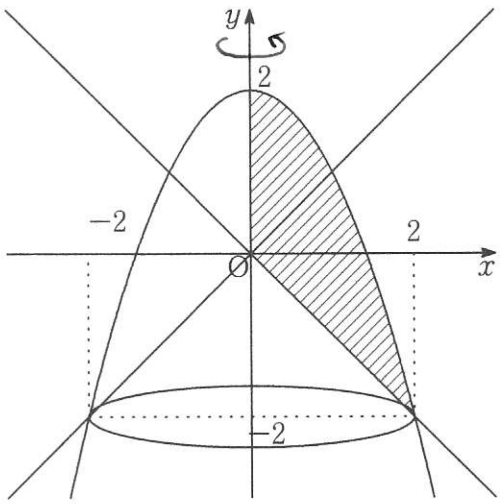
解　(1)　求める体積は，右図の斜線部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積である．

つまり，放物線 $y=2-x^2$ の $0 \leqq x \leqq 2$ の部分を y 軸の周りに 1 回転させた立体から，底面が半径 2 の円で高さが 2 である円錐を除いたものだから，

求める体積 V_y は，

円すいの体積

$$
\begin{aligned}
V_y &= \pi \int_{-2}^{2} x^2\,dy - 2^2 \times \pi \times 2 \times \frac{1}{3} \\
&= \pi \int_{-2}^{2} (2-y)\,dy - \frac{8}{3}\pi \\
&= 2\pi \int_{0}^{2} 2\,dy - \frac{8}{3}\pi \\
&= 2\pi \Big[\, 2y \,\Big]_{0}^{2} - \frac{8}{3}\pi \\
&= 8\pi - \frac{8}{3}\pi = \frac{16}{3}\pi
\end{aligned}
$$



"全体から抜く"という発想です。

放物面 − 円すい

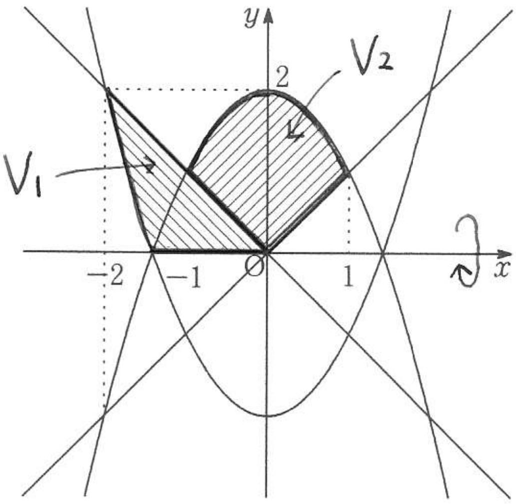
注　積分区間が異符号の場合 $\left(\int_{-a}^{a} f(x)\,dx\right)$ は，計算を簡略化できます．

解 (2) 求める体積は，右図の斜線部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積である．

まず，立体を図の太線で囲まれた 2 つの部分 V_1，V_2 に分ける．

V_1 は，$y=-x$ の $-2 \leqq x \leqq 0$ の部分を x 軸の周りに 1 回転させた立体（つまりは円錐）から，$y=x^2-2$ の $-2 \leqq x \leqq -\sqrt{2}$ の部分を x 軸の周りに 1 回転させた立体を除いたものである．

V_2 は，y 軸対称である．$y=2-x^2$ の $0 \leqq x \leqq 1$ の部分を x 軸の周りに 1 回転させた立体から，底面が半径 1 の円で高さが 1 である円錐を除いたものを 2 倍すればよい．



円すいの体積

$$
\begin{aligned}
V_1 &= 2^2\times\pi\times 2\times\frac{1}{3}-\pi\int_{-2}^{-\sqrt{2}}\{(x^2-2)^2\}\,dx\\
&=\frac{8}{3}\pi-\pi\int_{-2}^{-\sqrt{2}}(x^4-4x^2+4)\,dx\\
&=\frac{8}{3}\pi-\pi\Big[\,\frac{1}{5}x^5-\frac{4}{3}x^3+4x\,\Big]_{-2}^{-\sqrt{2}}\\
&=\frac{8}{3}\pi-\frac{\pi}{5}\{(-\sqrt{2})^5-(-2)^5\}+\frac{4\pi}{3}\{(-\sqrt{2})^3-(-2)^3\}-4\pi\{(-\sqrt{2})-(-2)\}\\
&=\frac{8}{3}\pi-\frac{\pi}{5}(-4\sqrt{2}+32)+\frac{4\pi}{3}(-2\sqrt{2}+8)-4\pi(-\sqrt{2}+2)\\
&=\pi\left(\frac{8}{3}-\frac{32}{5}+\frac{32}{3}-8\right)+\pi\left(\frac{4}{5}-\frac{8}{3}+4\right)\sqrt{2}\\
&=-\frac{16}{15}\pi+\frac{32}{15}\sqrt{2}\pi
\end{aligned}
$$

・図の対称性
・円すいの体積
この2つがポイント

円すいの体積

$$
\begin{aligned}
V_2 &= 2\left(\pi\int_0^1(2-x^2)^2\,dx-1^2\times\pi\times 1\times\frac{1}{3}\right)\\
&=2\pi\int_0^1(4-4x^2+x^4)\,dx-\frac{2\pi}{3}\\
&=2\pi\Big[\,4x-\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5\,\Big]_0^1-\frac{2\pi}{3}\\
&=2\pi\left(4-\frac{4}{3}+\frac{1}{5}\right)-\frac{2\pi}{3}\\
&=\left(2\times\frac{60-20+3}{15}-\frac{2}{3}\right)\pi\\
&=\frac{76}{15}\pi
\end{aligned}
$$

とは言うものの
やっぱり計算が大変…
自信ない…
トホホ…

したがって，求める体積 V_x は

$$
V_x=V_1+V_2=-\frac{16}{15}\pi+\frac{32}{15}\sqrt{2}\pi+\frac{76}{15}\pi=\left(4+\frac{32\sqrt{2}}{15}\right)\pi
$$