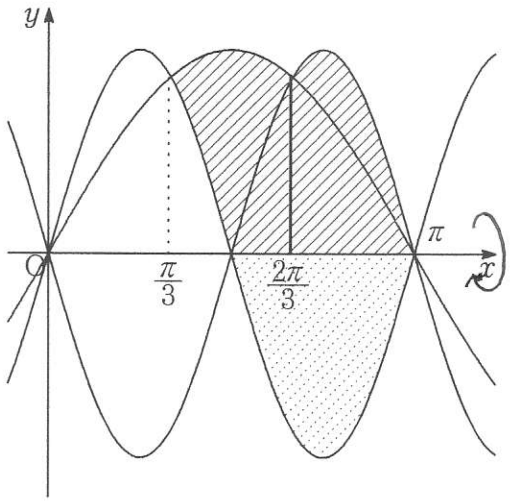
例題 曲線 $y = \sin x$ と $y = \sin 2x$ $\left(\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \pi\right)$ で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V_x を求めよ.

考え方 まずは 2 曲線の位置関係，交点を正確に把握しよう. $y = \sin x$ は周期 2π, $y = \sin 2x$ は周期 π です. 問題文の $\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \pi$ の意味も分かってくるはず.

今回も x 軸をまたいでいるので，頭の中で回転させて立体をイメージして，結局，どの部分を回転させたものになるのかを自分で把握せねばなりません.

まずは，積分区間を区切って真面目に計算してみよう.



解 求める体積は，右上図の斜線部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積である.
まず，立体を $\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{2\pi}{3}$ の部分 (V_1 とする) と $\dfrac{2\pi}{3} \leqq x \leqq \pi$ の部分 (V_2 とする) に分ける.

V_1 は, $y = \sin x$ の $\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{2\pi}{3}$ の部分を x 軸の周りに 1 回転させた立体から, $y = \sin 2x$ の $\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分を x 軸の周りに 1 回転させた立体を除いたものである.

V_2 は, $y = -\sin 2x$ の $\dfrac{2\pi}{3} \leqq x \leqq \pi$ の部分を x 軸の周りに 1 回転させた立体である.

$$V_x = \pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin^2 x\, dx - \pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x\, dx + \pi \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} (-\sin 2x)^2\, dx$$

式の意味はよくわかる…

$$\pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin^2 x\, dx = \pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \pi \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}$$
$$= \pi \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(\sin\frac{4\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right) \right\} = \pi\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x\, dx = \pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4x}{2}\, dx = \pi \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{8}\sin 4x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \pi \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{8}\left(\sin 2\pi - \sin\frac{4\pi}{3}\right) \right\} = \pi\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{16}\right)$$

$$\pi \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \sin^2 2x\, dx = \pi \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \frac{1-\cos 4x}{2}\, dx = \pi \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{8}\sin 4x \right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}$$
$$= \pi \left\{ \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{8}\left(\sin 4\pi - \sin\frac{8\pi}{3}\right) \right\} = \pi\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{16}\right)$$

こんなん
絶対ムリ!!

$$V_x = \pi\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) - \pi\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{16}\right) + \pi\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{16}\right) = \frac{1}{4}\pi^2 + \frac{3\sqrt{3}}{8}\pi$$

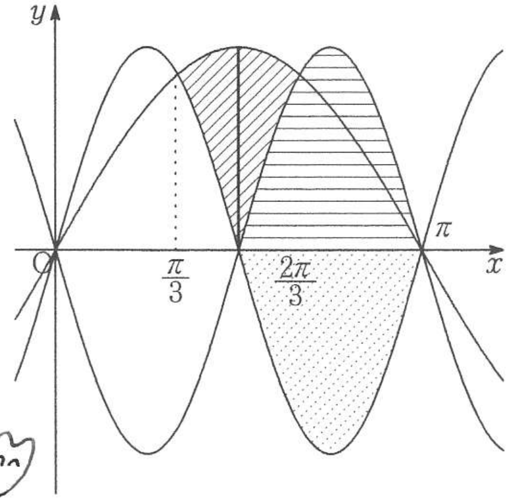
やりたくないー
いやー
やめてー

もう少し
楽に計算できんの?

参考 先ほどの解法は私が授業で紹介しましたが，生徒さんの方から「もっと上手い方法がある」と御意見をいただきました．早速，紹介しよう．なお，途中計算は省略し，考え方と式だけを紹介します．

別解(その 1)

図のように，斜線部分 V_1(銀杏の葉っぱみたいな形) と横線部分 V_2($\sin 2x$ の一山分) に分けて考える．



V_1 は $\dfrac{\pi}{2}$ に関して対称であることに注意すると，

$$V_1 = 2\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - \sin^2 2x)\,dx$$

$$V_2 = \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 2x\,dx$$

さっきより
ずいぶん 式が
スッキリしてる!!

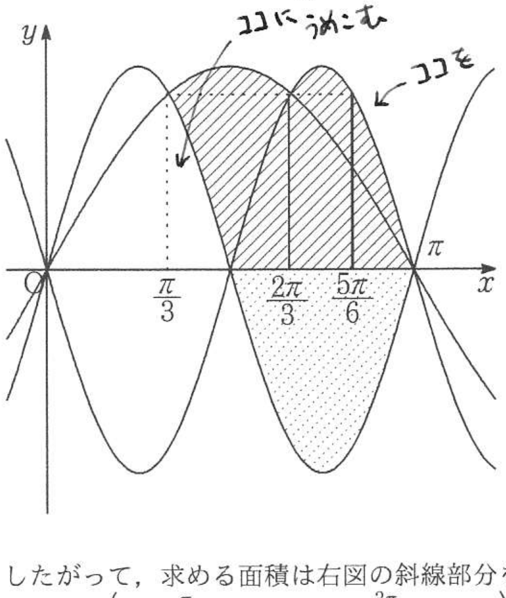
よって，求める体積 V_x は，$V_x = V_1 + V_2$.

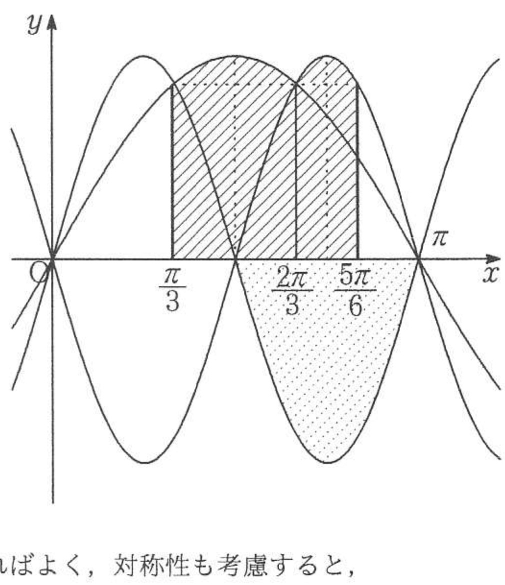
注 この **別解**(その 1) のすごい所は，積分区間が $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$ と $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$ の 2 種類であることです．実際に計算すればわかりますが，積分区間の端が $\dfrac{\pi}{2}$ や π だと計算がかなりラクになります．最初の **解** では，積分区間が $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}$，$\displaystyle\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$，$\displaystyle\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}$ の 3 種類もあったので計算が煩雑になりました．その点で，この解法の方が最初の **解** よりもクオリティーが高いといえるでしょう．

うん　こっちの方がエエで～

しかしながら，この **別解**(その 1) では積分区間の工夫が見られたものの，積分計算自体は，$\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$ を 1 回，$\displaystyle\int \sin^2 2x\,dx$ を 2 回の合計 3 回せねばならず，やっぱり煩わしいです．なんとかならないものでしょうか．すると次のような絶妙なアイデアで計算した人がいました．

別解 (その 2)　左図の $\dfrac{5\pi}{6} \leqq x \leqq \pi$ の部分を $\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分に埋め込むことができる (右図).





おへっ
スッキリ
納まった!!

これは
スゴイ!!

したがって，求める面積は右図の斜線部分を回転させればよく，対称性も考慮すると，

$V_x = 2\left(\pi\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x + \pi\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^2 2x\right)$ で求めることができる (積分計算も 2 回で済む).

注 これはなかなか面白い方法です．はみ出た部分が埋め込めることに気づくあたりがすごい．なかなか思いつかないかもしれませんが，図形を見たときに「ひょっとしたら埋め込めるのでは？」と意識するだけでもずいぶん違うと思います．大いに参考にしたい考え方ですね．

意識しよう!!

フムフム