神戸大学からのお便り

せめて神戸…
されど神戸…

神戸大学から次の『お便り』が届きました．今の段階で何とか解読できそうです．挑戦してみましょう．

神戸大学入試問題（2012 年度前期理系）

座標平面上の曲線 C を，媒介変数 $0 \leqq t \leqq 1$ を用いて，

$$\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}$$

と定める．以下の問に答えよ．

（1）曲線 C の概形を描け．

（2）曲線 C と x 軸で囲まれた部分が，y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

神戸大学って
とても標準的な
問題を出すんです

ちなみに この年は
全5問中．2問が
4STEP と ほとんど同じ
でした。

マジで？

一瞬，4STEP の問題なのかと見間違えるほどですが，「y 軸周りの回転体」というちょっとメンドウな状況になっています．しかし，そこは神戸大学．基礎基本に忠実に従えば解けるようになっています．

せっかくですから，x 軸とで囲まれた部分の面積や x 軸周りの回転体の体積も求めておこう（これは定期考査レベルです）．

1　グラフの概形

パラメータで表された関数のグラフを描くには次のことがポイントでした．

▷Point◁（グラフの描き方）

- $\boxed{\text{Step ①}}$ テキトーに点をとってみる．
- $\boxed{\text{Step ②}}$ $\dfrac{dx}{dt}$ の符号変化を調べて，t の変化に対して x 座標がどのように変化するのか調べる．
- $\boxed{\text{Step ②}}$ $\dfrac{dy}{dt}$ の符号変化を調べて，t の変化に対して y 座標がどのように変化するのか調べる．
- $\boxed{\text{Step ④}}$ （よりグラフの精度を上げたいのなら）$\dfrac{dy}{dx}$ の符号を調べて接線の傾きを調べる．

今回の場合，$\dfrac{dx}{dt} = -2t$ なので，$0 \leqq t \leqq 1$ で $\dfrac{dx}{dt} \leqq 0$．このことはつまり，t が増加すれば x 座標が減少することを意味しています．

また，$\dfrac{dy}{dt} = 1 - 3t^2$ なので，

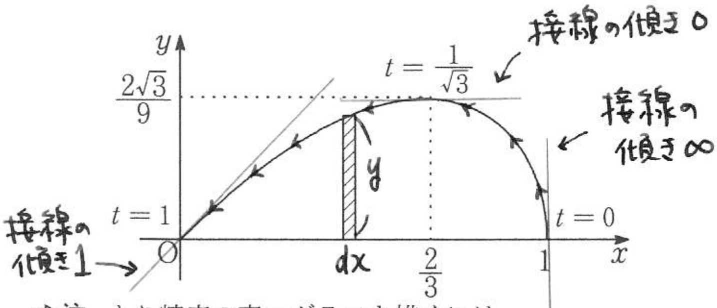
$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，$\dfrac{dy}{dt} \geqq 0$．

$\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leqq t \leqq 1$ のとき，$\dfrac{dy}{dt} \leqq 0$．

このことはつまり，$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のときは，t が増加すれば y 座標が増加し，$\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leqq t \leqq 1$ のときは，t が増加すれば y 座標が減少することを意味しています．また，$t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，$x = 1 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \dfrac{2}{3}$．$y = \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$．

“t”は 時間みたいなもんです。
t秒後の点 (x, y) の
位置を表しています。

以上のことだけで，グラフの概形が描けます．



➾注　より精度の高いグラフを描くには，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1 - 3t^2}{-2t}$$

の符号を調べます．いうまでもなくこの符号は接線の傾きを表しています．

なるほど～

そう考えると
イメージしやすいな

$t=0$ のとき $\dfrac{dy}{dx}$ の値はわけわかんないので $\left(\dfrac{1}{0}\ ?\right)$，$t=0$ のときの接線の傾きはない．つまり接線は y 軸に平行になります．

$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=0$ なので，$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のときの接線の傾きは 0.

$t=1$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=1$ なので，$t=1$ のときの接線の傾きは 1.

以上のことから，曲線の傾き具合を考慮して，前出のようなグラフが描けるのです．

ナットクしました—

2　x 軸とで囲まれた部分の面積

x 軸とで囲まれた部分の面積は基本です．ただし，t で置換積分する必要があります．積分区間に注意しよう．

解　$S=\displaystyle\int_0^1 y\,dx$ である．

$x=1-t^2$ より，
$dx=-2t\,dt$.

x	$0 \longrightarrow 1$
t	$1 \longrightarrow 0$

このへんは楽勝でしょう

OK

$$\int_0^1 y\,dx=\int_1^0(t-t^3)(-2t)\,dt$$
$$=2\int_0^1(t^2-t^4)\,dt=\frac{4}{15}$$

3　x 軸周りの回転体の体積

回転軸に垂直な断面で考えます．半径 y，厚み dx の円板の寄せ集めと考えるのでしたね．前出の図の斜線部分を回転すると考えます．

解　$V_x=\pi\displaystyle\int_0^1 y^2\,dx$ である．

$x=1-t^2$ より，
$dx=-2t\,dt$.

x	$0 \longrightarrow 1$
t	$1 \longrightarrow 0$

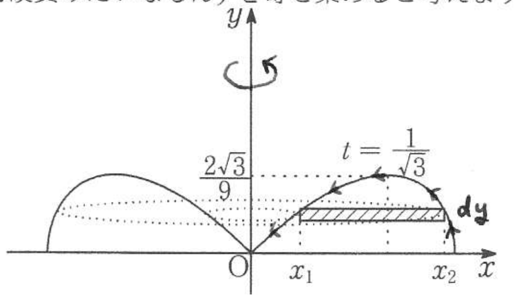
$$\pi\int_0^1 y^2\,dx=\pi\int_1^0(t-t^3)^2(-2t)\,dt$$
$$=2\pi\int_0^1 t(t-t^3)^2\,dt$$
$$=2\pi\int_0^1(t^3-2t^5+t^7)\,dt$$
$$=2\pi\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{3}t^6+\frac{1}{8}t^8\right]_0^1=\frac{\pi}{12}$$

このへんも楽勝でしょう

OK．なんとか…

4　y 軸周りの回転体の体積

いよいよ神戸大学の問題に到着．基本的な考え方は x 軸周りの回転体と同じ．つまり，回転軸に垂直な断面で考えるので，今回の場合，下図の斜線部分を y 軸周りに回転させると考えて，穴あき円板（50円硬貨みたいなもん）を寄せ集めると考えます．



解　図のように x_1，x_2 を定める．つまり，曲線 C の

$0\leqq t\leqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ の部分を $x=x_2$ $\left(0\leqq y\leqq\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\right)$.

$\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq t\leqq 1$ の部分を $x=x_1$ $\left(0\leqq y\leqq\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\right)$

と表すと，求める体積は，

yの値を1つとると xの値が 2つ定まります

$$\pi\int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{9}}\{(x_2)^2-(x_1)^2\}\,dy$$
$$=\pi\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}(1-t^2)^2(1-3t^2)\,dt-\int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}}(1-t^2)^2(1-3t^2)\,dt\right)$$
$$=\pi\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}(1-t^2)^2(1-3t^2)\,dt+\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1(1-t^2)^2(1-3t^2)\,dt\right)$$
$$=\pi\int_0^1(1-t^2)^2(1-3t^2)\,dt=\pi\int_0^1(1-t^2)^2(1-3t^2)\,dt$$
$$=\pi\int_0^1(1-5t^2+7t^4-3t^6)\,dt$$
$$=\pi\left[t-\frac{5}{3}t^3+\frac{7}{5}t^5-\frac{3}{7}t^7\right]_0^1=\frac{32}{105}\pi$$

うーん さすが神戸大学… ちょっとムズイなあ

注　置換積分の様子を省略しましたが分かりますか．まず，$y=t-t^3$ より $dy=(1-3t^2)\,dt$.

x については，$x=x_1$ も $x=x_2$ も媒介変数 t の世界では同じ関数なので，t で置換した瞬間にどっちも $1-t^2$ になります．しかし，積分区間が，

$x=x_1$ の部分では，

y	$0 \longrightarrow \frac{2\sqrt{3}}{9}$
t	$1 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}$

$x=x_2$ の部分では，

y	$0 \longrightarrow \frac{2\sqrt{3}}{9}$
t	$0 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}$

となるので注意しよう．

はーい

でも基本に忠実にやれば，解けることがわかりました。