微分のココロ

『微分法』の基礎事項をまとめておこう．とにかく関数を「正確に」微分できなければ話が始まりません。基本的な関数でよいので，数をこなして早く正確に微分できるようになること．やってみて，分からなかったり，間違えたりした場合に，その都度このプリントを使って復習するのがよいでしょう．

1 『微分法』の始まり

まずは，数学 Ⅱ で学習した内容の復習から始めよう．

そもそも『微分法』は，関数 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の方程式を求めることから始まります．しかし，曲線上にただ 1 点のみで接する直線を引くことなど現実問題として不可能なので，極限の考えを用いて接線の傾きを定義するのでした．

1.1 微分係数

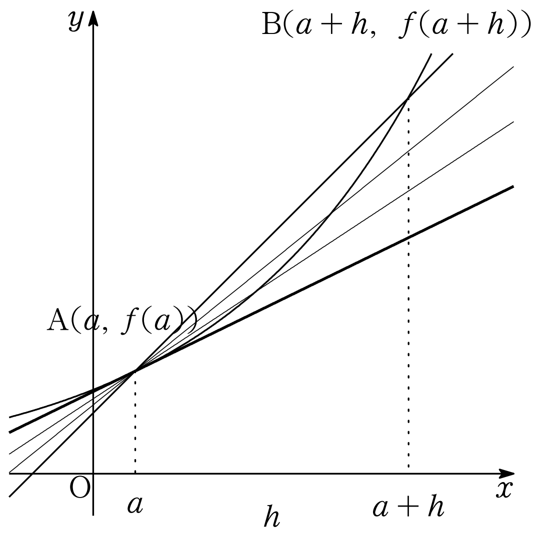
まず，関数 $y=f(x)$ 上に点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ と点 $\mathrm{B}(a+h,\ f(a+h))$ をとり，2 点 A，B を通る直線を考えよう．直線 AB の傾きは，

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

ここで，点 B を点 A に限りなく近づけていくと，直線 AB は点 A における接線に限りなく近づいていくことがわかります．このとき h は 0 に限りなく近づくので，関数 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の傾きは

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

という極限の形で表現されます．



この極限値を $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における微分係数（または単に $x=a$ における微分係数）とよび，$f'(a)$ で表します．

▷Point◁(微分係数の定義)

> $y=f(x)$ の $x=a$ における微分係数を
>
> $$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
>
> と定義する．
>
> 微分係数 $f'(a)$ は，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の傾きを意味している．

✏注 「定義に従って微分係数を求めよ」と言われたら，この微分係数の定義に従って極限値の計算をします．

✏注 ちょっと言葉を整理すると

「$y=f(x)$ の $x=a$ における接線の傾きを求めよ」

「$y=f(x)$ の $x=a$ における微分係数を求めよ」

「$f'(a)$ を求めよ」

という言い回しは，どれも同じ意味です．同じことを言い換えているだけです．

1.2 導関数

微分係数 $f'(a)$ の a をいろいろと変化させると，関数 $y=f(x)$ 上のいろいろな点における接線の傾きが求められます．つまり，微分係数は a の値によって定まるので，a についての関数とみなすことができます．

そこで定数 a を関数としての変数 x でおきかえて,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

としたものを,**関数 $y=f(x)$ の導関数**といいます. $f'(x)$ を単に y' と書きます. 導関数の表し方は他にも, $\dfrac{dy}{dx}$ や $\dfrac{d}{dx}f(x)$ があり, どれを使っても構いませんが, 今後のことを考えると, $\dfrac{dy}{dx}$ が一番よいかと思います.

なお, $\dfrac{dy}{dx}$ の読み方は「ディーワイ, ディーエックス」です.

参考 「$\dfrac{dy}{dx}$ を『ディーエックス　ブンノ　ディーワイ』と読んではいけない. なぜなら, $\dfrac{dy}{dx}$ は分数ではなく, これで一つの記号だからだ」と強く主張する人がいますが, 僕は, そこまで強くは思いません. 確かに「ディーワイ, ディーエックス」が正式な読み方ですが,「ディーエックス　ブンノ　ディーワイ」という読み方の方が, 微分法の本質に忠実であると思われるからです. 例えば, $y=x^3$ のとき, $\dfrac{dy}{dx}=3x^2$ ですが, そのうち, 積分を学習するようになると, $y=x^3$ から, いきなり $dy=3x^2dx$ と平気で書くようになります. $\dfrac{dy}{dx}$ は分数ではなく, これで一つの記号のはずなのに, dx と dy が分離して独り歩きしています. どうして分離してもよいのでしょうか? 詳しくは後日配布するプリント『微分の本質』を熟読してください.

▷Point◁($y=f(x)$ の導関数)

関数 $y=f(x)$ の導関数を

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

と定義する.
関数 $f(x)$ から導関数 $f'(x)$ を求めることを**微分する**という.

注 「関数 $y=f(x)$ を定義に従って微分せよ」と言われたら, この導関数の定義に従って極限値の計算します.

注 逆に言うと, **導関数 $f'(x)$ に $x=a$ を代入したものが, 微分係数 $f'(a)$ すなわち曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の傾きです.**

よく「$y=f(x)$ の接線の傾きが $f'(x)$ である」という人がいますが, これは全く違います. 導関数 $f'(x)$ に $x=a$ を代入して初めて点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における微分係数つまり接線の傾き $f'(a)$ になるのです. $f'(x)$ は接線の傾きではありません (単なる関数に過ぎない).

微分係数 $f'(a)$ と導関数 $f'(x)$ をしっかりと区別しよう.

参考 微分係数の定義

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

において, $a+h=b$ とおくと, $h=b-a$ であり, $h\longrightarrow 0$ のとき $b\longrightarrow a$ だから,

$$f'(a)=\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\quad\cdots\cdots ①$$

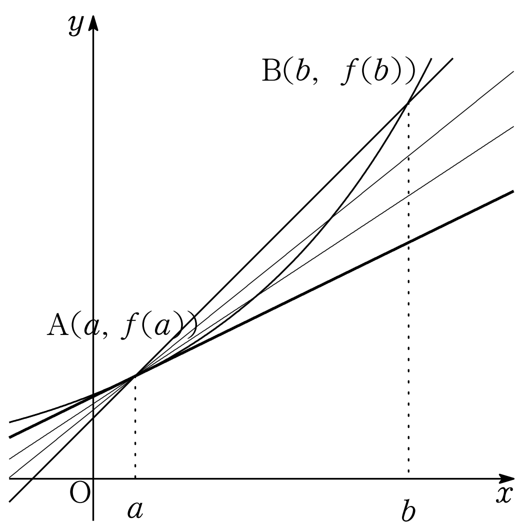
とする場合もあります. また, b を x に書き換えて

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\quad\cdots\cdots ②$$

とする場合もあります. これらの形でも憶えておこう.

① は, 点 $\mathrm{B}(b,\ f(b))$ が点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ に近づく様子を, ② は, 点 $\mathrm{B}(x,\ f(x))$ が点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ に近づく様子を, それぞれイメージすれば良いでしょう.

丸暗記ではなく意味を考えて憶えてください.



それでは「定義に従って」微分係数や導関数を求めてみよう。

【例】 $y=f(x)=x^2+3x$ のとき，定義に従って微分係数 $f'(1)$ を求めよ.

解

$$
\begin{aligned}
f'(1)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2+3(1+h)-(1^2+3\cdot 1)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{1+2h+h^2+3+3h-1-3}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+5h}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}(h+5)\\
&=5
\end{aligned}
$$

✏注 このことは，$y=x^2+3x$ の $x=1$ における接線の傾きが 5 であることを意味しています．曲線に接線を引くことなど現実的に不可能であるにも関わらず，理論的な極限値計算で接線の傾きが求まっていることを意識してください．感動的だと思いませんか.

【例】 $y=f(x)=x^2+3x$ を定義に従って微分せよ.

解

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+3(x+h)-(x^2+3x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2+3x+3h-x^2-3x}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2+3h}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}(2x+h+3)\\
&=2x+3
\end{aligned}
$$

✏注 この結果からも分かるように，先ほどの微分係数 $f'(1)$ の値は，$f'(x)=2x+3$ において，$x=1$ を代入した値に一致しています ($f'(1)=2\cdot 1+3=5$).

よって，$f'(1)$，$f'(2)$，$f'(3)$，$f'(4)$，……，などの値を個別に計算するのではなく，最初に導関数 $f'(x)=2x+3$ を求めてから，この導関数に $x=1, 2, 3, 4,$ …… を代入すれば良いのです.

【例】 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，　$g(x)=\sqrt{x}$ を定義に従って微分せよ.

解

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{-h}{x(x+h)}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)}\\
&=-\frac{1}{x^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\\
&=\frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

■

✏注 $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$ と $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ の結果は憶えておこう．後ほど全く違う方法で導きます.

1.3　わりと有名な問題

微分係数や導関数の定義を利用する代表的な問題を紹介しよう．

> **例題** c は定数とし，関数 $f(x)$ は $x=c$ で微分可能とする．このとき，次の極限値を c，$f'(c)$ などを用いて表せ．
>
> (1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(c+3h)-f(c)}{h}$
>
> (2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(c+4h)-f(c-2h)}{h}$

考え方 微分係数 $f'(c)$ の定義

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(x)}{h}$$

において，別に h でなくても

$$f'(c)=\lim_{\bigcirc\to 0}\frac{f(c+\bigcirc)-f(x)}{\bigcirc}$$

のように ◯ 部分がそろっていれば良いのです．

いずれにしても，**定義が使える形にゴーインにもっていくことがポイント**．

解 (1)

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{f(c+3h)-f(c)}{h}\\ =&\lim_{h\to 0}\frac{f(c+3h)-f(c)}{3h}\times 3\\ =&3f'(c)\end{aligned}$$

■

(2)

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{f(c+4h)-f(c-2h)}{h}\\ =&\lim_{h\to 0}\frac{f(c+4h)-f(c)+f(c)-f(c-2h)}{h}\\ =&\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(c+4h)-f(c)}{h}-\frac{f(c-2h)-f(c)}{h}\right)\\ =&\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(c+4h)-f(c)}{4h}\cdot 4\right.\\ &\left.\qquad-\frac{f(c-2h)-f(c)}{-2h}\cdot(-2)\right)\\ =&4f'(c)-(-2)f'(c)\\ =&6f'(c)\end{aligned}$$

■

> **例題** 次の極限値を求めよ
>
> (1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{\sin(x-a)}$
>
> (2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^2\sin a-a^2\sin x}{x-a}$

考え方 $x-c=t$ と置き換えても良いですが，せっかくなので微分係数のもう一つの定義式

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

を利用しよう．今回の場合，言うまでもなく $f(x)=\sin x$ ですが，まずは a や $f'(a)$ を用いて表そう．ここでも，**定義が使える形にゴーインにもっていくことがポイント**．

解 $f(x)=\sin x$ とおく．

(1)

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{f(x-a)}\\ &=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\frac{x-a}{f(x-a)}\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=\cos a$$

$$\lim_{x\to a}\frac{x-a}{f(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{\sin(x-a)}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1$$

($x-a=t$ とおくと，$x\longrightarrow a$ のとき $t\longrightarrow 0$)

したがって，求める極限値は $\cos a\times 1=\cos a$

■

(2)

(与式)

$$\begin{aligned}&=\lim_{x\to a}\frac{x^2f(a)-a^2f(x)}{x-a}\\ &=\lim_{x\to a}\frac{-a^2(f(x)-f(a))-a^2f(a)+x^2f(a)}{x-a}\\ &=\lim_{x\to a}\frac{-a^2(f(x)-f(a))+f(a)(x^2-a^2)}{x-a}\\ &=\lim_{x\to a}\left(\frac{-a^2(f(x)-f(a))}{x-a}+\frac{f(a)(x^2-a^2)}{x-a}\right)\\ &=\lim_{x\to a}\left(-a^2\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+f(a)(x+a)\right)\\ &=-a^2f'(a)+2af(a)\\ &=-a^2\cos a+2a\sin a\end{aligned}$$

■

注 $(\sin x)'=\cos x$ であることは後ほど学習します．

2　微分の計算

ここからは，実戦的な微分の計算に入ります．まず始めに，$y=x^n$ の微分から紹介しよう．

▷Point◁(x^n の微分 ①)

n を自然数とする．
$y=x^n$ を微分すると，$y'=nx^{n-1}$ である．

✎注　数学 II では $n=1,\ 2,\ 3$ の場合だけを扱いましたが，n は全ての自然数で成立します．

だから，次のような関数でも

$$y=2x^5+3x^4-3x^3+x^2-5x+1$$

$$y'=10x^4+12x^3-9x^2+2x-5$$

と簡単に微分できるのです．

$\boxed{(x^n)'=nx^{n-1} \text{ であることの証明}}$

$f(x)=x^n$ とおいて，微分の定義より，

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{x^n+{}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}h+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}h^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}xh^{n-1}+h^n-x^n}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{{}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}h+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}h^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}xh^{n-1}+h^n}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}({}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}h+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}xh^{n-2}+h^{n-1})\\
&={}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}=nx^{n-1} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

✎注　数学 II では，$f(x)=x^2$ や $g(x)=x^3$ の微分を定義に従って

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}(2x+h)\\
&=2x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)\\
&=3x^2
\end{aligned}$$

としました．上の証明はこれらの計算を一般的にやっているだけです．

✎注　教科書では，$(x^n)'=nx^{n-1}$ を数学的帰納法で証明していますが，ここでは**二項定理**を使う証明を紹介しました (こっちの方が，後々役に立つと思います)．二項定理は必ず暗記しておこう．

▷Point◁(二項定理)

$$\begin{aligned}
(a+b)^n&=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_ka^{n-k}b^k\\
&={}_n\mathrm{C}_0a^nb^0+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b^1+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}a^1b^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_na^0b^n
\end{aligned}$$

3　積の微分と商の微分

2 つの関数の積 $f(x)g(x)$ や商 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ の微分の公式は必ず覚えておかねばなりません．なお，見やすくするために，$f(x)$ や $f'(x)$ を単に f や f' と表記します．

3.1　積の微分

▷Point◁(積の微分)

f と g がそれぞれ微分可能であるとき，

$$(fg)' = f'g + fg'$$

が成立する．

✎注　数学 II では，「式は展開してから微分せよ」と習いましたが，積の微分公式を用いれば，展開せずに微分ができます．

例えば，$y = (x^2+1)(x-2)$ の場合

展開すると，$y = x^3 - 2x^2 + x - 2$ なので，

$$y' = 3x^2 - 4x + 1$$

となりますが，積の微分公式を用いると，

$$\begin{aligned} y' &= (x^2+1)'(x-2) + (x^2+1)(x-2)' \\ &= 2x(x-2) + (x^2+1)\cdot 1 \\ &= 3x^2 - 4x + 1 \end{aligned}$$

となります．

いちおう，積の微分公式を証明しますが，別にスルーして構いません．

積の微分公式の証明　定義に従って微分します．

$$\begin{aligned} \{f(x)g(x)\}' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h) + f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \right\} \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad (fg)' = f'g + fg'$$

■

✎注　上の証明をみて，何か疑問に思うことはありませんか．上の lim の計算では，最後の部分 (※) で，lim をバラしていますが，勝手にバラしてよいのでしょうか．

lim の計算では，各項が収束する場合に限り，lim をバラすことが可能でした．今回の場合，各項が収束する保証がどこにあるのでしょうか．

それは，「$f(x)$，$g(x)$ がそれぞれ微分可能であるとき」という条件文にあります．

「$f(x)$ が微分可能である」とはザックリ言うと「$f'(x)$ がきちんと定まる」ということです．つまり，2 つの極限値，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ と $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ が

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$$

とちゃんと収束するのです．

また，一般的に「関数が微分可能ならば連続である」ことが知られています．今回の場合，$g(x)$ が微分可能なので，$g(x)$ は連続，よって，連続性の定義から

$$\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$$

が成立します．

以上のことから，各項が収束するので，lim をバラして計算することができるのです．

したがって，厳密に言えば，（※）部分の計算において，「$f(x)$，$g(x)$ がそれぞれ微分可能なので」や「$g(x)$ が微分可能なので，$g(x)$ は連続になるから」ということに言及しないと不十分で減点されます．まっ，今回はいいでしょう．

微分可能性や連続性との関わりについては，別の犬プリで詳しく解説するので，今はあまり気にせず，サラッと流しておきましょう．

参考 3 つの関数の積 fgh を微分するどうなるのか考えてみよう．

$fgh = (fg)\cdot h$ というように，fg をひとまとまりに考えて微分すると，

$$(fgh)' = ((fg)\cdot h)' = (fg)'h + (fg)h' = (f'g + fg')h + fgh' = f'gh + fg'h + fgh'$$

$$\therefore \quad (fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$$

3 つの関数の積の微分はそんなに登場しませんが，形が美しいので覚えておきましょう．

✏**注**　うすうす気づいていると思いますが，4 つ以上の関数の積の場合も同様です．

3.2　商の微分

▷Point◁（商の微分）

f と g がそれぞれ微分可能であるとき，

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

が成立する．

この公式において，$f = 1$（定数関数）の場合は，$f' = 1' = 0$ なので，

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{1'\cdot g - 1\cdot g'}{g^2} = -\frac{g'}{g^2}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

となります．これは単独で覚えておこう．

いちおう，商の微分公式を証明しますが，別にスルーして構いません．

商の微分公式の証明　定義に従って微分します．

$$\begin{aligned}
\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' &= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h\cdot g(x+h)g(x)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h\cdot g(x+h)g(x)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h) - f(x)\}g(x) - f(x)\{g(x+h) - g(x)\}}{h\cdot g(x+h)g(x)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\left\{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\cdot g(x) - f(x)\cdot\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right\} \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

■

参考 ちょっと変わった証明を紹介しましょう．

商の微分公式の別証明

$y=\dfrac{f}{g}$ とおくと，$yg=f$．この両辺を x で微分すると，積の微分公式より，

$$y'g+yg'=f'$$

$$y'g=f'-yg'=f'-\frac{f}{g}g'=\frac{f'g-fg'}{g}$$

よって，$y'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$

$$\therefore\ \left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$$

■

注 積の微分公式を上手く利用して，商の微分公式を導いていますが，厳密に言うとこの証明はちょっとマズイのです．なぜでしょうか？

さて $(x^n)'=nx^{n-1}$ の公式は，n が自然数の場合に成立しますが，商の微分公式を利用すれば，n が整数全体の場合にも成立することが示されます．

▷Point◁(x^n の微分 ②)

n を整数とする．
$y=x^n$ を微分すると，$y'=nx^{n-1}$ である．

証明 n が自然数の場合はすでに成立することが証明されているので，まず n が負の整数の場合を考える．このとき，$n=-m$ とおくと，m は自然数である．

$$(x^n)'=(x^{-m})'=\left(\frac{1}{x^m}\right)'=-\frac{(x^m)'}{(x^m)^2}$$
$$=-\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}}=-mx^{-m-1}=nx^{n-1}$$

よって，$y'=nx^{n-1}$ が成立する．

次に，$n=0$ の場合，$(x^0)'=(1)'=0$ より，$y'=nx^{n-1}$ に $n=0$ を代入したものに一致するから，$y'=nx^{n-1}$ は $n=0$ でも成立する．

以上より，$y'=nx^{n-1}$ は全ての整数 n で成立する．

■

このことから，例えば $\dfrac{1}{x}$ や $\dfrac{1}{x^3}$ の微分は，$\dfrac{1}{x}=x^{-1}$，$\dfrac{1}{x^3}=x^{-3}$，と解釈すれば，

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=(x^{-1})'=-1x^{-1-1}=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{x^3}\right)'=(x^{-3})'=-3x^{-3-1}=-3x^{-4}=-\frac{3}{x^4}$$

となります．

注 $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$ は公式として憶えておこう．

参考 最終的に，$(x^n)'=nx^{n-1}$ は，n が整数だけでなくすべての実数で成立しますが，それを証明するのは，まだまだ多くのことを学ばねばなりません．

例 題 次の関数を微分せよ．

(1) $y=(2x^2-1)(x^2-3x+1)$

(2) $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$

(3) $y=\dfrac{1}{x^2-x+1}$

(4) $y=\dfrac{3}{2x-1}$

考え方 公式に当てはめるだけ．(3) は，すんなりできるのに，(4) で戸惑う人が見受けられますが，(4) は $y=3\cdot\dfrac{1}{2x-1}$ とすれば，分子の 3 は $\dfrac{1}{2x-1}$ の係数と解釈できます．

解 (1)

$$y'=(2x^2-1)'(x^2-3x+1)+(2x^2-1)(x^2-3x+1)'$$
$$=4x(x^2-3x+1)+(2x^2-1)(2x-3)$$
$$=8x^3-18x^2+2x+3$$

(2)

$$y'=\frac{(x^2+2x+2)'(x+1)-(x^2+2x+2)(x+1)'}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{(2x+2)(x+1)-(x^2+2x+2)\cdot 1}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

(3)

$$y'=-\frac{(x^2-x+1)'}{(x^2-x+1)^2}$$
$$=-\frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}$$

(4)

$$y'=-3\cdot\frac{(2x-1)'}{(2x-1)^2}$$
$$=-\frac{6}{(2x-1)^2}$$

■

4　合成関数の微分法

4.1　合成関数とは

例えば，関数 $y=(2x+1)^3$ の値を求めるとき，まずは (　　) の中身を計算してから，3 乗すると思います．つまり,「2 倍して 1 を足して」から「3 乗する」わけです．

$$x \xrightarrow{\text{2 倍して 1 を足す}} 2x+1 \xrightarrow{\text{3 乗する}} (2x+1)^3$$

「2 倍して 1 を足す」という関数を g,「3 乗する」という関数を f とすれば，この関数関係は次のように表記されます．

$$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x))$$

つまり，$f(g(x))=(2x+1)^3$

$f(g(x))$ とは，x を関数 g で変換した後で，さらに関数 f で変換することを意味しており，このような関数を，f と g の**合成関数**といいます．合成関数 $f(g(x))$ をシンプルに $f\circ g(x)$，さらにシンプルに $f\circ g$ と書くこともあります．

✎**注**　f と g の順番に注意しよう．上の例で，もし f と g を逆にしてしまったらぜんぜん違う関数になってしまいます．

$$x \xrightarrow{\text{3 乗する}} x^3 \xrightarrow{\text{2 倍して 1 を足す}} 2x^3+1$$

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$$

つまり，$g(f(x))=2x^3+1$

$$\therefore\quad f(g(x)) \fallingdotseq g(f(x))$$

合成関数が与えられたとき，**どういう関数をどういう順番で施したものなのかを見極めることが重要**です．そのためには，合成関数 $y=f(g(x))$ で，$g(x)=u$ とおいて，連立方程式のように分解して表記すると分かりやすいでしょう．

$$y=f(g(x)) \iff \begin{cases} u=g(x) \\ y=f(u) \end{cases}$$

つまり，x と y の関数関係 $y=f(g(x))$ を，x と u の関数関係と u と y の関数関係に分割したわけです．

$$x \xrightarrow{\quad f\circ g \quad} y$$

$$x \xrightarrow[g]{} u \xrightarrow[f]{} y$$

具体例で見ていくことにしよう．

【例】　$y=(x^2-3x+1)^2$ の場合．

$x^2-3x+1=u$ とおくと，$y=u^2$ なので，この関数は 2 つの関数 $u=x^2-3x+1$ と $y=u^2$ の合成関数になっています．つまり，

$$y=(x^2-3x+1)^2 \iff \begin{cases} u=x^2-3x+1 \\ y=u^2 \end{cases}$$

ここで，$g(x)=x^2-3x+1$，$f(u)=u^2$ とおけば，

$$y=(x^2-3x+1)^2 \iff y=f(g(x))$$

となります．

【例】　$y=\sqrt{2x+1}$ の場合．

$2x+1=u$ とおくと，$y=\sqrt{u}$ なので，この関数は 2 つの関数 $u=2x+1$ と $y=\sqrt{u}$ の合成関数になっています．つまり，

$$y=\sqrt{2x+1} \iff \begin{cases} u=2x+1 \\ y=\sqrt{u} \end{cases}$$

ここで，$g(x)=2x+1$，$f(u)=\sqrt{u}$ とおけば，

$$y=\sqrt{2x+1} \iff y=f(g(x))$$

となります．

合成関数の微分がどのようになるのかを考えよう．

4.2　合成関数の微分公式

合成関数の微分法とは次のようなものです．いきなり結論を書きますが，下の説明を読んで，一発で分かった人はエライです．大抵の人は「はぁ？」ってなると思います．具体例を通して考えることが大切です．

▷Point◁(合成関数の微分)

$y=f(u)$，$u=g(x)$ がそれぞれ u，x の
微分可能な関数であるとき，
合成関数 $y=f(g(x))$ も微分可能で，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

という関係式が成立する．

✏注　合成関数の微分公式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

は，下のように，x と y の関数関係を，x と u の関数関係と u と y の関数関係に分解するとき，**微分 $\dfrac{dy}{dx}$ が微分 $\dfrac{dy}{du}$ と微分 $\dfrac{du}{dx}$ の積になる，つまり，全体の微分が分解した個々の微分の積になる**ということを意味しています．

$$x \xrightarrow{\quad \frac{dy}{dx} \quad} y$$

$$x \xrightarrow[\frac{du}{dx}]{} u \xrightarrow[\frac{dy}{du}]{} y$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

✏注　関係式をよく見ると，まるで**分数式の約分のように見えます**．記号 $\dfrac{dy}{dx}$ は分数ではないので，あくまでも「約分っぽい感じ」にすぎないのですが，こういう風に感じられることが，記号 $\dfrac{dy}{dx}$ のメリットなのです．

もしこの記号を使わないのであれば，
$\dfrac{dy}{dx}=\{f(g(x))\}'$，
$\dfrac{dy}{du}=f'(u)=f'(g(x))$，$\dfrac{du}{dx}=g'(x)$

なので，合成関数の微分公式は

$$\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$$

と表されますが，こう書いてしまうと**分数式の約分っぽい感じが完全に失われてしまい，かえって分かりにくくなっています．記号 $\dfrac{dy}{dx}$ がいかに分かりやすくて便利なのかが実感できる**と思います．この記号を発明したライプニッツさんに感謝感謝です．

まずは，具体例で合成関数の微分公式が成立していることを確かめてみよう．

【例】　$y=(2x+1)^3$ を微分せよ．

$2x+1=u$ とおくと，$y=u^3$ なので，この関数は 2 つの関数 $u=2x+13$ と $y=u^3$ の合成関数になっています．つまり，

$$y=(2x+1)^3 \iff \begin{cases} u=2x+1 \\ y=u^3 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{du}=3u^2,\qquad \frac{du}{dx}=2$$

合成関数の微分公式より

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\&=3u^2\cdot 2\\&=3(2x+1)^2\cdot 2\\&=6(2x+1)^2\end{aligned}$$

実際に，展開して微分してみると，

$$y=8x^3+12x^2+6x+1$$

$$\frac{dy}{dx}=24x^2+24x+6=6(4x^2+4x+1)=6(2x+1)^2$$

なので，合成関数の微分公式が成立していることがわかります．

【例】　$y=(x^2-3x+1)^2$ を微分せよ．

$x^2-3x+1=u$ とおくと，$y=u^2$ なので，この関数は 2 つの関数 $u=x^2-3x+1$ と $y=u^2$ の合成関数になっています．つまり，

$$y=(x^2-3x+1)^2 \iff \begin{cases} u=x^2-3x+1 \\ y=u^2 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{du}=2u, \qquad \frac{du}{dx}=2x-3$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\&=2u\cdot(2x-3)\\&=2(x^2-3x+1)(2x-3)\end{aligned}$$

実際に，展開して微分すると，

$$y=x^4-6x^3+19x^2-30x+25$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=4x^3-18x^2+38x-30\\&=2(2x^3-9x^2+19x-15)\\&=2(2x-3)(x^2-3x+1)\end{aligned}$$

なので，合成関数の微分公式が成立していることがわかります．

このように，合成関数の微分公式を使えば，いちいち展開しなくても，微分することができるので，とても早くて便利です．

最後に，合成関数の微分公式を証明しときますが，別にパスしてよいです．

$\boxed{\text{証明}}$ 定義に従って，$y=f(g(x))$ の導関数を求めると，

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

ここで前半部分に注目する．

$g(x+h)-g(x)=t$ とおくと，$h\longrightarrow 0$ のとき，$t\longrightarrow 0$ だから，（※ ✎注）

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{f(t+g(x))-f(g(x))}{t}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{f(t+u)-f(u)}{t}=f'(u)=\frac{dy}{du}\end{aligned}$$

また，後半部分に注目すると，

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x)=\frac{du}{dx}$$

したがって，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

が成立する． ■

✎注 $h\longrightarrow 0$ のとき $h\fallingdotseq 0$ ですが，このとき，$t\fallingdotseq 0$ という保証はないので，$t=0$ の場合に証明は不十分です．これを解消するには「平均値の定理」を用いる必要がありますが，今は $t\fallingdotseq 0$ である関数に限定しておきます．

4.3 慎重派 VS ザックリ派

もう少し，合成関数の微分をやってみよう．**関数のどの部分をひとまとめに考えるか**が重要です．

【例】$y=(x^2+3x+1)^3$ を微分せよ．

解 $\underline{x^2+3x+1=u}$とおくと，$y=u^3$．
したがって，

$$\frac{dy}{du}=3u^2, \quad \frac{du}{dx}=2x+3$$

なので，合成関数の微分公式より，

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\&=3u^2\cdot(2x+3)\\&=3(x^2+3x+1)^2(2x+3)\end{aligned} \quad ■$$

✎注 展開する必要はありません．そのままでOK.

【例】$y=\dfrac{1}{(2x^3+3)^2}$ を微分せよ．

解 $\underline{2x^3+3=u}$とおくと，$y=\dfrac{1}{u^2}=u^{-2}$．
したがって，

$$\frac{dy}{du}=-2u^{-3}, \quad \frac{du}{dx}=6x^2$$

なので，合成関数の微分公式より，

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\&=-2u^{-3}\cdot 6x^2\\&=-\frac{12x^2}{(2x^3+3)^3}\end{aligned} \quad ■$$

いずれも，関数の一部分を u と置き換えて考え，最後に再び u に置き換えた部分を戻しています．
でも，以上の 2 つの【例】をやってみて

「わざわざ置き換える意味あるんかなあ？」

「置き換えせんと，一気にできるんとちゃう？」

と思いませんでしたか？そう思った人はエライ．

特に最初の【例】の答えをよく見ると,

$$\frac{dy}{dx}=3(x^2+3x+1)^2(2x+3)$$

前半の $3(x^2+3x+1)^2$ は $y=(x^2+3x+1)^3$ で x^2+3x+1 を「ひとまとめ」に考えてザックリ微分したものであり ($(\bigcirc^3)'=3\bigcirc^2$), 後半の $2x+3$ は「ひとまとめ」に考えた x^2+3x+1 を微分したものになっています.

同じく, $y=\dfrac{1}{(2x^3+3)^2}$ の場合も, $2x^3+3$ を「ひとまとめ」に考えて, ザックリ微分し, 最後に「ひとまとめ」の微分をつけます. つまり,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=-2(2x^3+3)^{-2-1}\cdot(2x^3+3)'\\&=-2(2x^3+3)^{-3}\cdot 6x^2\\&=-\frac{12x^2}{(2x^3+3)^3}\end{aligned}$$

となるのです.

▷Point◁(合成関数の微分の基本姿勢)

ある部分を「ひとまとめ」に見てザックリ微分し, 最後に「ひとまとめ」にした部分の微分をかける.

公式通りに置き換えてやる人を「慎重派」, この方法でやる人「ザックリ派」とでも呼びましょう.

【例】 $y=(x^2+2x+3)^2$ の微分.

解 (ザックリ派)

x^2+2x+3 を「ひとまとめ」にみて,「ザックリ微分 ×『ひとまとめ』の微分」をします.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=2(x^2+2x+3)^{2-1}\cdot(x^2+2x+3)'\\&=2(x^2+2x+3)(2x+2)\\&=4(x^2+2x+3)(x+1)\end{aligned}$$

解 (慎重派)

合成関数の公式に基づき, 置き換えして慎重に微分します.

$x^2+2x+3=u$ とおくと, $y=u^2$ であり, $\dfrac{dy}{du}=2u$, $\dfrac{du}{dx}=2x+2$ なので,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\&=2u\cdot(2x+2)\\&=2(x^2+2x+3)(2x+2)\\&=4(x^2+2x+3)(x+1)\end{aligned}$$

■

以上の 2 つの流派を比べてみてどうでしょうか. 結局, 同じことをやってるだけなので, 正しく微分できさえすればどちらの流派でもかまいません (個人的には「ザックリ派」を推奨したいところです).

やればやるほど, 上手く早く微分できるようになるので, 問題数をこなしてください.「習うより慣れろ」というわけです.

いちおう, 次の公式を紹介しておこう. この公式は「ザックリ派」の人にとっては「当たり前のこと」すぎて覚える必要はないでしょう. **ある部分を「ひとまとめ」に見てザックリ微分し, 最後に「ひとまとめ」にした部分の微分をくっつける.** というザックリ派の精神そのものだからです.

いちおう,「慎重派」で証明しておきましょう.

▷Point◁(合成関数の微分公式)

公式 ① $\dfrac{d}{dx}f(ax+b)=af'(ax+b)$

公式 ② $\dfrac{d}{dx}\{f(x)\}^n=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$

(n は整数)

公式 ① の証明

$y=f(ax+b)$ において $ax+b=u$ とおくと $y=f(u)$.

したがって, $\dfrac{dy}{du}=f'(u)$, $\dfrac{du}{dx}=a$ なので,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(u)\cdot a=af'(ax+b)$$

■

公式 ② の証明

$y=\{f(x)\}^n$ において $f(x)=u$ とおくと $y=u^n$.

したがって, $\dfrac{dy}{du}=nu^{n-1}$, $\dfrac{du}{dx}=f'(x)$ な

ので,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=nu^{n-1}\cdot f'(x)=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$$

■

✎注 こんな公式は覚える必要ありません.

さて，これまで，$(x^n)'=nx^{n-1}$ の公式は，n が整数の場合に成立することが示されていますが，合成関数の微分公式を利用すれば，n を有理数全体の場合にも成立することが示されます.

▷Point◁(x^r の微分 ③)

r を有理数とする.
$y=x^r$ を微分すると，$y'=rx^{r-1}$ である.

証明　r は有理数であるので，$r=\dfrac{m}{n}$ とおく.
ただし，n は自然数，m を整数とする.

$y=x^{\frac{m}{n}}$ の両辺を n 乗して，$y^n=x^m$.

この式の両辺を x で微分すると,

$$ny^{n-1}y'=mx^{m-1}$$

したがって,

$$y'=\frac{mx^{m-1}}{ny^{n-1}}=\frac{m}{n}\cdot\frac{x^{m-1}}{\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{n-1}}$$

$$=\frac{m}{n}\cdot\frac{x^{m-1}}{x^{m-\frac{m}{n}}}=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}=rx^{r-1}$$

■

✎注 $(y^n)'=ny^{n-1}y'$ について.

なぜ，y^n を x で微分すると $ny^{n-1}y'$ になるか分かりますか．それは，もともと y 自体が x の関数だからです (だって，$y=x^r$ ですよ).

$$(\{f(x)\}^n)'=nf(x)^{n-1}\cdot f'(x)$$

という公式を先ほど紹介しました．$f(x)$ は x の関数です．だから，y が x の関数なので，この公式で $f(x)$ を y に置き換えた,

$$(y^n)'=ny^{n-1}y'$$

という式が成立するのです.

このことから，例えば $\sqrt{x}$ や $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ の微分は，$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$，$\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}=x^{-\frac{1}{3}}$，と解釈すれば,

$$(\sqrt{x})'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)'=\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)'$$

$$=-\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1}=-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}=-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$$

となります.

✎注 $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ は公式として憶えておこう.

したがって，先ほど紹介した合成関数の微分公式 ② は，n を有理数に拡張でき,

▷Point◁(合成関数の微分公式)

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\}^r=r\{f(x)\}^{r-1}f'(x)$$

(r は有理数)

となります.

例題　次の関数を微分せよ.

(1) $y=x^{\frac{3}{5}}$　　(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^5}}$

(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^7}}$

解 (1) $y'=\dfrac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1}=\dfrac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$

(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^5}}=x^{-\frac{5}{2}}$ より,

$$y'=-\frac{5}{2}x^{-\frac{5}{2}-1}=-\frac{5}{2}x^{-\frac{7}{2}}=-\frac{5}{2\sqrt{x^7}}$$

(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^7}}=x^{-\frac{7}{4}}$ より,

$$y'=-\frac{7}{4}x^{-\frac{7}{4}-1}=-\frac{7}{4}x^{-\frac{11}{4}}=-\frac{7}{4\sqrt[4]{x^{11}}}$$

■

✎注 微分した答えは，いちおう，もとの関数の形に合わせるのが普通です．なので，(1) は指数の形のままですが，(2)(3) は累乗根の形に直しています．でも，微分するだけで終わることなんて無いから，結局，どちらでもいいです.

例題　次の関数を微分せよ.

(1) $y=\sqrt{x^2+1}$　　(2) $y=\sqrt[3]{3x+1}$

考え方　もちろん，ザックリ派でやります.
当然，$\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ は暗記してますね.

ここでも微分した形は，もとの関数の形に合わせています．

解

(1) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (x^2+1)' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(2) $y = \sqrt[3]{3x+1} = (3x+1)^{\frac{1}{3}}$

$y' = \dfrac{1}{3}(3x+1)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (3x+1)'$

$= (3x+1)^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}}$

■

5　逆関数の微分法

5.1　逆関数とは

関数 $y = f(x)$ において，y の値 b に対して，$b = f(a)$ となるような x の値 a がただ一つに定まるとき，b を a に対応させる関係式を $a = f^{-1}(b)$ と書きます．つまり

$$b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$$

注　両辺を「f で割った」ようなイメージです．

この関係は「関数」と考えられます．この関数を $y = f^{-1}(x)$ と表し，$y = f(x)$ の逆関数と言います．

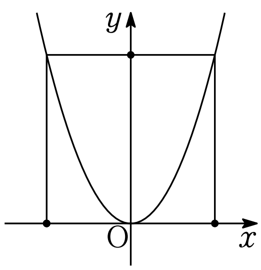
逆関数は常に存在するとは限りません．例えば，

$$y = x^2$$

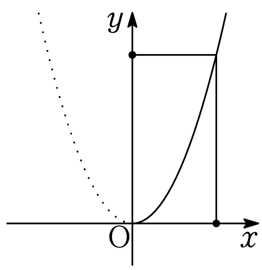
の逆関数は存在しません．y の値に対して x の値が一つに定まるとは限らないからです．しかし，

$$y = x^2 \ (x \geqq 0)$$

には逆関数が存在します．y の値に対して x の値がただ一つに定まるからです．



$y = x^2$



$y = x^2 \ (x \geqq 0)$

この逆関数を求めてみよう．

$$b = f(a) = a^2 \ (a \geqq 0)$$

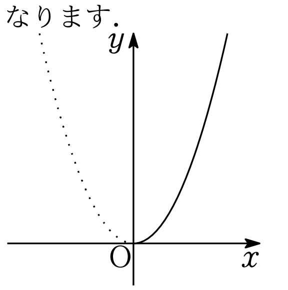
を a について解くと，ただ一通りに解けて

$$a = f^{-1}(b) = \sqrt{b}$$

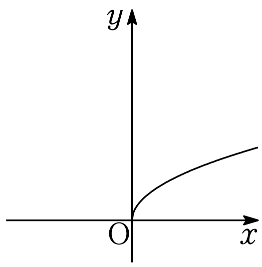
つまり，$y = f(x) = x^2 \ (x \geqq 0)$ の逆関数は，

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

となります．

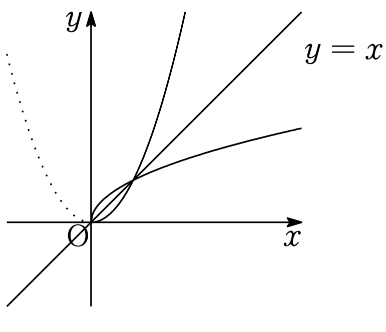


$y = x^2 \ (x \geqq 0)$



$y = \sqrt{x}$

注　上の 2 つのグラフを重ねて書くと，あることに気がつきます．



2 つのグラフが $y = x$ に関して対称であることが分かります．

まあ，逆の対応関係を考えているから当たり前ですね．このことは覚えておいた方が良いでしょう．

▷Point◁(逆関数の性質)

$y = f(x)$ と，その逆関数 $y = f^{-1}(x)$ は $y = x$ に関して対称的である．

逆関数を求める場合，丁寧に解答すれば，先ほどのようになりますが，現実的には次のように機械的に求めます．

▷Point◁(逆関数の求め方)

Step ①　$y = f(x)$ を $x = g(x)$ の形に変形する．
Step ②　x と y を入れ替えて，$y = g(x)$ とする．これが，$y = f(x)$ の逆関数である．

【例】　次の関数の逆関数を求めよ．
(1)　$y = \frac{1}{2}x + 3$　　(2)　$y = 2^x$

考え方　特に何も考えずに，機械的にやります．
解
(1)　$y = \frac{1}{2}x + 3$ を x について解くと

$$x = 2y - 6$$

よって，逆関数は x と y を入れ替えて

$$y = 2x - 6$$

(2)　$y = 2^x$ を x について解くと

$$x = \log_2 y$$

よって，逆関数は x と y を入れ替えて

$$y = \log_2 x$$

■

【例】　次の関数の逆関数を求めよ．

$$y = \frac{1}{x+1}\ (x \geqq 0)$$

考え方　逆関数の式を求めるだけなら，先ほどと同様に機械的な計算で済みます．つまり，$y = \frac{1}{x+1}$ を x について解くと

$$x = \frac{1}{y} - 1$$

よって，逆関数は x と y を入れ替えて

$$y = \frac{1}{x} - 1$$

です．しかし，今回はもとの関数の定義域 (x の範囲) に条件が付いているので，逆関数の定義域にも条件が付くはずです．逆関数の定義域はどうやって考えるのでしょうか．

もうお分かりだと思いますが，最終的に x と y を入れ替えているので

逆関数の定義域 (x の範囲)

‖

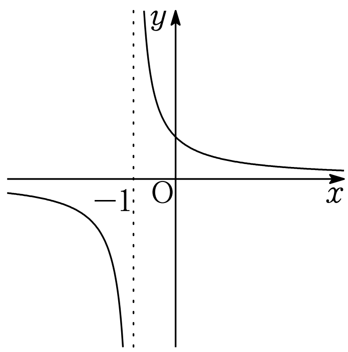
もとの関数の値域 (y の範囲)

です．つまり，最初に元の関数の値域を求めておく必要があります．

▷Point◁(逆関数の性質)

逆関数の定義域は，もとの関数の値域に一致する．

解　$y = \frac{1}{x+1}$ のグラフは，以下の通り．



よって，定義域が $x \geqq 0$ の時の値域は，$0 < y \leqq 1$ である．
$y = \frac{1}{x+1}$ を x について解くと

$$x = \frac{1}{y} - 1$$

よって，逆関数は x と y を入れ替えて

$$y = \frac{1}{x} - 1$$

この関数の定義域は元の関数の値域に一致する．

$$\therefore\ \ y = \frac{1}{x} - 1\ \ (0 < x \leqq 1)$$

■

5.2　逆関数の微分公式

$\dfrac{dy}{dx}$ は y を x で微分することを意味し，
$\dfrac{dx}{dy}$ は x を y で微分することを意味します．

同じ関数において，$\dfrac{dy}{dx}$ と $\dfrac{dx}{dy}$ の間にどのような関係が成り立つのでしょうか．

まずは具体例で確認しよう．$\dfrac{dx}{dy}$ を計算するには，$y=f(x)$ を $x=g(x)$ の形に変形せねばならないことに注意しよう．

> 【例】1 次関数 $y=3x+2$ の場合．

まず，$\dfrac{dy}{dx}=3$ である．
$y=3x+2$ を変形して $x=\dfrac{1}{3}y-\dfrac{2}{3}$ とすれば，

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{3}$$

したがって，$\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dy}=3\cdot\dfrac{1}{3}=1$

■

> 【例】無理関数 $y=\sqrt{x}$ の場合．

まず，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ である．
$y=\sqrt{x}$ を変形して $x=y^2$ とすれば，

$$\frac{dx}{dy}=2y$$

したがって，$\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot 2y=\dfrac{y}{\sqrt{x}}=1$

■

これらの例からも，$\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dy}=1$ が成立していることがわかります．

つまり，同じ関数において，$\dfrac{dy}{dx}$ と $\dfrac{dx}{dy}$ の間に次の関係が成り立ちます．

▷Point◁ (逆関数の微分公式)

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1$$

✎**注**　合成関数の微分公式のときもそうでしたが，逆関数の微分公式も，まるで**分数式の約分のように見えます**．記号 $\dfrac{dy}{dx}$ は分数ではないので，あくまでも「約分っぽい感じ」にすぎないのですが，こういう風に感じられることが，記号 $\dfrac{dy}{dx}$ のメリットなのです．

$$x \xrightarrow{\ \frac{dy}{dx}\ } y$$

$$x \xleftarrow[\ \frac{dy}{dx}\ ]{} y$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1$$

いちおう，逆関数の微分公式を証明しときますが，別にパスしてよいです．

証明　$y=f(x)$ を x について解いたものを $x=g(y)$ とする．
$x=g(y)$ の両辺を x で微分すると，
(左辺) $=\dfrac{d}{dx}x=1$
(右辺) $=\dfrac{d}{dx}g(y)=\dfrac{d}{dy}g(y)\cdot\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dx}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}$
したがって，$\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dy}=1$ が成立する．

■

> 【例】　次の関数を逆関数の微分公式を利用して微分せよ．
> (1)　$y=\sqrt[3]{x}$　　(2)　$y=x^{\frac{1}{6}}$

考え方　先ほど，$x^{(\text{有理数})}$ の微分公式を学んだので，逆関数の微分公式など使わなくても微分できるんですが，やってみます．

解

(1)　$y=\sqrt[3]{x}$ を x について解くと，$x=y^3$．
このとき，$\dfrac{dx}{dy}=3y^2$
したがって，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{3y^2}=\frac{1}{3}y^{-2}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

(2)　$y=x^{\frac{1}{6}}$ を x について解くと，$x=y^6$．
このとき，$\dfrac{dx}{dy}=6y^5$

したがって，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{6y^5}=\frac{1}{6x^{\frac{5}{6}}}=\frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$$

■

以上のことを一般化すれば，逆関数の微分公式から $x^{(\text{有理数})}$ の微分公式を導くことができますが，先ほど紹介した証明方法の方がずっと簡単なので，サラッと見る程度で良いです．

▷Point◁(x^n の微分)

p を有理数とする．
$y=x^r$ を微分すると，$y'=rx^{r-1}$ である．

証明 $r=\frac{m}{n}$ とし，まずは，$y=x^{\frac{1}{n}}$ の場合を考えよう．$x=y^n$ となるので，$\frac{dx}{dy}=ny^{n-1}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{ny^{n-1}}=\frac{1}{n}y^{-n+1}$$

$$=\frac{1}{n}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{-n+1}=\frac{1}{n}x^{-1+\frac{1}{n}}$$

次に，$y=x^{\frac{m}{n}}=\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$ の場合を考えると，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m=m\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)'$$

$$=mx^{\frac{m-1}{n}}\cdot\frac{1}{n}x^{-1+\frac{1}{n}}=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}=rx^{r-1}$$

$$\therefore\ (x^r)'=rx^{r-1}\quad(r:\text{有理数})$$

■

さて，以上の例だけでは，イマイチ，逆関数の微分公式のありがたみが分かりませんが，重要なのは次のことです．これが，逆関数の微分公式の本質です．

▷Point◁(逆関数の微分の利用)

x と y の関数関係において，$\frac{dy}{dx}$ を求めたいが，$\frac{dy}{dx}$ よりも $\frac{dx}{dy}$ の方が簡単に求められる場合，$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1$ が成立するので，$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ より，$\frac{dy}{dx}$ を求めれば良い．

次のような場合に，逆関数の微分公式が効果を発揮します．

【例】 次の関数について $\frac{dy}{dx}$ を x の式で表せ．

$$x=y^2-2y$$

考え方 $x=y^2-2y$ を y についての 2 次方程式とみて解くと，$y=1\pm\sqrt{1+x}$ となります．これを x で微分すれば良いだけですが，逆関数の微分公式を使うと次のような感じになります．

解 $x=y^2-2y$ より，$\frac{dx}{dy}=2y-2$

よって，$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{2y-2}$

$x=y^2-2y$ より，$y^2-2y-x=0$ なので，$y=1\pm\sqrt{1+x}$

$2y-2=2(1\pm\sqrt{1+x})-2=\pm2\sqrt{1+x}$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\pm\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

■

「$y=1\pm\sqrt{1+x}$ をそのまま微分したほうが早いやん．$\left(\sqrt{x+1}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ は暗記してるし」と思うかもしれません．確かにそうですが，次の例だと，逆関数の微分公式を使わないとどうしようもできません．

【例】 次の関数について $\frac{dy}{dx}$ を x の式で表せ．

$$x=\sin y$$

考え方 先ほどの例では，$y=\cdots$ の形に変形できたので，逆関数の微分公式を使わなくてもできなくはなかったですが，今回は $y=\cdots$ の形に変形することは不可能です．逆関数の微分公式を使うしかありません．なお，$(\sin x)'=\cos x$ であることは既知とします (もうすぐ学習します)．

解 $x=\sin y$ のとき，$\frac{dx}{dy}=\cos y$

よって，$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\cos y}$

$\cos y = \pm\sqrt{1-\sin^2 y} = \pm\sqrt{1-x^2}$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

■

次の問題も質問がとても多いです.

【例】 $f(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ の $x = \dfrac{1}{9}$ における微分係数を求めよ.

考え方 「$f(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$ の逆関数 $f^{-1}(x)$」とは，どういう意味か分かっていますか？

それは，$y = \dfrac{1}{x^3+1}$ において x と y を入れ替えた式 $x = \dfrac{1}{y^3+1}$ を $y = \cdots$ の形に変形した式が $f^{-1}(x)$ ということです.

つまり，この問題は,「$x = \dfrac{1}{y^3+1}$ において $\dfrac{dy}{dx}$ を計算し，それに $x = \dfrac{1}{9}$ を代入しろ」と言っているのです. $\dfrac{dy}{dx}$ が x で表されていれば問題ないのですが・・・・

解 $f^{-1}(x) = y$ とおくと，$x = f(y)$ であるので

$$x = \frac{1}{y^3+1} \quad \cdots①$$

このとき，$\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{(y^3+1)'}{(y^3+1)^2} = -\dfrac{3y^2}{(y^3+1)^2}$

つまり，

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(y^3+1)^2}{3y^2} \quad \cdots②$$

① において，$x = \dfrac{1}{9}$ のとき，$y = 2$ であるので，求める微分係数は, ② に $y = 2$ を代入して，$-\dfrac{27}{4}$.

■

注 ② を x で表すことができたら，それに $x = \dfrac{1}{9}$ を代入すれば良いのですが，y で表されているため，$x = \dfrac{1}{9}$ のときの y の値を求めて，それを代入したのです.

6　三角関数の微分法

いきなりですが，2013 年に大阪大学 (理系) で次のような問題が出題されました．

2013 大阪大学 (理系) 入試問題

三角関数の極限に関する公式

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

を示すことにより，$\sin x$ の導関数が $\cos x$ であることを証明せよ

さすがに驚きました．1999 年に東京大学で「三角関数の加法定理を証明せよ」という問題が出題されたのと同じくらいの衝撃でした (ちなみにこの年の阪大文系では「点と直線の距離の公式を証明せよ」という問題が出題されています．こちらの方が難しい？)．

この問題にもあるように，三角関数の微分公式を導くには，極限値の重要公式

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

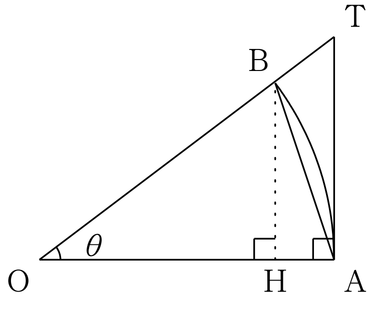
が必要になってきます．復習も兼ねて，この極限値の公式を証明してみよう．

証明

$\theta \longrightarrow 0$ のときを考えるから，$0 < |\theta| < \dfrac{\pi}{2}$ として良い．

(i) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

点 O を中心とする半径 1 の円において，中心角 θ の扇形 OAB を考える．点 B から OA におろした垂線を BH，点 A における円 O の接線が OB の延長と交わる点を T とする．



このとき，面積の大小関係

$$\triangle\mathrm{OAB} < \text{扇形 OAB} < \triangle\mathrm{OAT}$$

が成立する．

$\mathrm{BH} = \sin\theta$，$\mathrm{AT} = \tan\theta$ であるので，

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin\theta < \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\theta < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan\theta$$

よって

$$\sin\theta < \theta < \tan\theta$$

両辺を $\sin\theta$ で割ると，$\sin\theta > 0$ なので，

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

ゆえに

$$\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1$$

$\displaystyle\lim_{\theta \to +0} \cos\theta = 1$ なので，ハサミウチの原理より

$$\lim_{\theta \to +0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

(ii) $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < 0$ のとき

$\theta = -t$ とおくと，$\theta \longrightarrow -0$ のとき，$t \longrightarrow +0$ なので，

$$\lim_{\theta \to -0} \frac{\sin\theta}{\theta} = \lim_{t \to +0} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t \to +0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

(i)(ii) より

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

■

✏**注**　実をいうと，この証明は数学的に正しくありません．何がマズいのか分かりますか？

この後，$\displaystyle\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ を使って，三角関数の微分公式を証明します．で，三角関数の微分公式から三角関数の積分公式を証明し，三角関数の積分公式を利用して半径 r の円の面積が πr^2 であることを証明します．で，円 (扇形) の面積を使って，$\displaystyle\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ を証明するのです！堂々巡りになっていることに気がつきましたか？この自己矛盾を解消する方法はありますが，高校の学習範囲を超えるのでここでは触れないでおくことにしましょう．

それでは，三角関数の微分公式を紹介しよう．三角関数の微分は，数学 Ⅲ では最も重要です．

▷Point◁(三角関数の微分)

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x \qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

✏注　証明も含めて完璧に理解し暗記すること．本当に重要です．「怖い婆さん，死んでも怖い」

まずは，$\sin x$ と $\cos x$ の場合を証明します．当然ながら，微分の定義に従って証明しますが，2 通りの方法があります．

$\sin x$ と $\cos x$ の微分公式の証明 (その ①)　(和積公式を利用する証明)

$f(x) = \sin x$ とすると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \\ &= \lim_{h\to 0} \cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \\ &= \cos x \end{aligned}$$

$g(x) = \cos x$ とすると

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \\ &= \lim_{h\to 0} \left\{-\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right\} \\ &= -\sin x \end{aligned}$$

■

✏注　非常にシンプルな証明です．$\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$ を利用しています．

✏注　三角関数の和積公式を憶えていない人は，すぐに自分で作れるようにしておこう．

作り方　加法定理を組み合わせる．

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$　……①

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$　……②

① − ② より，$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$

$\alpha+\beta = A$，$\alpha-\beta = B$ とおくと，$\alpha = \dfrac{A+B}{2}$，$\beta = \dfrac{A-B}{2}$ なので，

$\therefore\ \sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$　(完成！)

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$　……③

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$　……④

③ − ④ より，$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$

$\alpha+\beta = A$，$\alpha-\beta = B$ とおくと，$\alpha = \dfrac{A+B}{2}$，$\beta = \dfrac{A-B}{2}$ なので，

$\therefore\ \cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$　(完成！)

✏注　念のため，$\sin A + \sin B$，$\cos A + \cos B$ の公式も作り，各自で確認しておくこと．

$\boxed{\sin x \text{ と } \cos x \text{ の微分公式の証明 (その②)}}$ (加法定理を利用する証明)

まず始めに，次の極限値を求めておく (後で必要になってくる).

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = \lim_{h \to 0} \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{-\sin h}{\cos h + 1} = 1 \times 0 = 0$$

$f(x) = \sin x$ とすると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \sin h + \sin x(\cos h - 1)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left\{ \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} + \sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} \right\} \\ &= \cos x \times 1 + \sin x \times 0 \\ &= \cos x \end{aligned}$$

$g(x) = \cos x$ とすると

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-\sin x \sin h + \cos x(\cos h - 1)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left\{ -\sin x \cdot \frac{\sin h}{h} + \cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} \right\} \\ &= -\sin x \times 1 + \cos x \times 0 \\ &= -\sin x \end{aligned}$$

■

✏**注**　加法定理を利用した証明は，和積公式の場合と比べてかなりメンドウですが，三角関数の極限値を計算する良い練習にもなります．何も見ずに自分でスラスラと証明できるようになっておこう．

続いて，$\tan x$ の微分公式を証明しよう．もちろん，定義にしたがって証明しますが，tan には和積公式がないので，加法定理を利用するしか方法がありません．

$\boxed{\tan x \text{ の微分公式の証明}}$

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \lim_{h \to 0} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{\tan x + \tan h}{1 - \tan x \tan h} - \tan x \right) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{\tan x + \tan h - \tan x(1 - \tan x \tan h)}{1 - \tan x \tan h} \right) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{\tan h + \tan^2 x \tan h}{1 - \tan x \tan h} \right) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\tan h}{h} \left(\frac{1 + \tan^2 x}{1 - \tan x \tan h} \right) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \frac{1}{\cos h} \left(\frac{1 + \tan^2 x}{1 - \tan x \tan h} \right) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1 + \tan^2 x}{1 - \tan x \times 0} \\ &= 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

✏**注**　一般的に，$\tan x$ の微分公式は，「$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$」と紹介されることがほとんどですが，$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ なので，「$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$」でも構わないわけです．上の証明はこのことを物語っています．このように，公式をいろんな角度から見ることは，後々に役に立つことでしょう．

✎注 $\sin x$ と $\cos x$ の微分公式を利用してよければ，$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ なので，商の微分公式を利用すれば簡単です．

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

■

さて，三角関数の基本形の微分をマスターしたら，今度はこれまでに学習した積の微分，商の微分，合成関数の微分などが加わります．代表的な問題を紹介するので，まずはこれらをしっかりと理解しよう．あとはこれらの組合せに過ぎません．

【例】　$y = \sin x\cos x$ の微分．

解　積の微分法の公式より，

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (\sin x)'\cos x + \sin x(\cos x)'\\ &= \cos x\cos x + \sin x(-\sin x)\\ &= \cos^2 x - \sin^2 x\\ &= \cos 2x\end{aligned}$$

■

【例】　$y = \dfrac{1}{\tan x}$ の微分．

解　商の微分法の公式より，

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\frac{(\tan x)'}{(\tan x)^2}\\ &= -\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x}\\ &= -\frac{1}{\sin^2 x}\end{aligned}$$

■

✎注　この結果は準公式として暗記しておいた方が良いでしょう．後ほど役に立つと思います．

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\left(\frac{1}{\tan x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

それでは，三角関数の微分に，先ほど学習した「ザックリ微分」を融合してみよう．

▷Point◁

合成関数の微分の基本姿勢

ある部分を「ひとまとめ」に見てザックリ微分し，最後に「ひとまとめ」にした部分の微分をくっつける．

何をひとまとめに考えるのか，がポイントです．

【例】　$y = \sin^2 x$ の微分．

解（ザックリ派）

$\sin^2 x = (\sin x)^2$ なので，$\sin x$ を「ひとまとめ」にみて，一気にやります．

$$\frac{dy}{dx} = 2\sin x\cdot(\sin x)' = 2\sin x\cos x = \sin 2x$$

解（慎重派）

$y = \sin^2 x = (\sin x)^2$ だから，$\sin x = u$ と置換すると，$y = u^2$．

$$\frac{dy}{du} = 2u,\quad \frac{du}{dx} = \cos x$$

合成関数の微分公式より，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = 2u\cdot\cos x = 2\sin x\cos x = \sin 2x$$

■

✎注 $(\sin^2 x)' = \sin 2x$ になるのは，2 倍角の公式から，$y = \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ なので，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin 2x\cdot(2x)'}{2} = \sin 2x$$

となるので，当然のことです．

また，先ほどの【例】で，$(\sin x\cos x)' = \cos 2x$ になるのも，2 倍角の公式より，

$y = \sin x\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$ なので，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\cos 2x\cdot(2x)' = \cos 2x$$

となるので，これまた明らかです．

【例】　$y = \sin(x^2)$ の微分．

先ほどの， $\sin^2 x$ と混乱しないようにしよう．

解（ザックリ派）

今回は，$\sin(x^2)$ なので，x^2 を「ひとまとめ」にみて，一気にやります．

$$\frac{dy}{dx} = \cos x^2\cdot(x^2)' = 2x\cos x^2$$

解（慎重派）

$x^2 = u$ と置換すると，$y = \sin u$．

$$\frac{dy}{du} = \cos u,\quad \frac{du}{dx} = 2x$$

合成関数の微分公式より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \cos u\cdot 2x = 2x\cos x^2$$

■

以上の 2 つの例がキチンと理解できていれば，どんな微分でも大丈夫なんですが，もう少し代表的な例を紹介しておこう．

【例】　$y = \tan^3 x$ の微分．

解（ザックリ派）

$\tan x$ を「ひとまとめ」にみて，一気にやります．

$$\frac{dy}{dx} = 3(\tan x)^{3-1}\cdot(\tan x)' = \frac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}$$

解（慎重派）

$\tan x = u$ とおくと，$y = u^3$ であり，

$$\frac{dy}{du} = 3u^2,\quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

合成関数の微分公式より，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = 3u^2\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}$$

■

【例】　$y = \sqrt{1+\sin x}$ の微分．

解（ザックリ派）

$1+\sin x$ を「ひとまとめ」にみて，一気にやります．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{1+\sin x}}(1+\sin x)' = \frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}$$

解（慎重派）

$1+\sin x = u$ と置換すると，$y = \sqrt{u}$．

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}},\quad \frac{du}{dx} = \cos x$$

合成関数の微分公式より，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot\cos x = \frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}$$

■

【例】　$y = \sin(\cos x)$ の微分．

一瞬，わけが分かりませんが，冷静に落ち着いて考えれば大したことありません．

解（ザックリ派）

$\cos x$ を「ひとまとめ」にみて，一気にやります．

$$\frac{dy}{dx} = \cos(\cos x)\cdot(\cos x)' = -\sin x\cos(\cos x)$$

解（慎重派）

$\cos x = u$ と置換すると，$y = \sin u$．

$$\frac{dy}{du} = \cos u,\quad \frac{du}{dx} = -\sin x$$

合成関数の微分公式より，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \cos u\cdot(-\sin x) = -\sin x\cos(\cos x)$$

■

最後に，総まとめとして次の問題をやろう．

【例】　次の関数を微分せよ．

(1)　$y = \cos(3x-2)$ の微分．

(2) $y=\cos^3 x$ の微分.
(3) $y=\cos^3(3x-2)$ の微分.

(1)

解 (ザックリ派)

$3x-2$ を「ひとまとめ」にみて，一気にやります.

$$\frac{dy}{dx}=-\sin(3x-2)\cdot(3x-2)'$$
$$=-3\sin(3x-2)$$

解 (慎重派)

$3x-2=u$ とおくと，$y=\cos u$ であり，

$$\frac{dy}{du}=-\sin u,\quad \frac{du}{dx}=3$$

合成関数の微分公式より，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=-\sin u\cdot 3=-3\sin(3x-2)$$

■

(2)

解 (ザックリ派)

$\cos x$ を「ひとまとめ」にみて，一気にやります.

$$\frac{dy}{dx}=3\cos^2 x\cdot(\cos x)'$$
$$=-3\cos^2 x\sin x$$

解 (慎重派)

$\cos x=u$ とおくと，$y=u^3$ であり，

$$\frac{dy}{du}=3u^2,\quad \frac{du}{dx}=-\sin x$$

合成関数の微分公式より，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=3u^2\cdot(-\sin x)=-3\cos^2 x\sin x$$

■

(3)

解 (ザックリ派)

$\cos(3x-2)$ を「ひとまとめ」にみて，一気にやります.「大きな視点で大きく『ひとまとめ』に考える」ことを心がけよう.

$$\frac{dy}{dx}=3\{\cos(3x-2)\}^2\cdot\{\cos(3x-2)\}'$$

$$=3\cos^2(3x-2)\cdot\{-\sin(3x-2)\}\cdot(3x-2)'$$

$$=-9\cos^2(3x-2)\sin(3x-2)$$

次に，「慎重派」では，置き換えをすることが重要でした．今回の場合，$\cos(3x-2)=u$ と置くか，$3x-2=u$ と置くか，2 通りの解釈があります．つまり

(ア)　$\cos(3x-2)=u$ とおくと，$y=u^3$.

この場合，$\dfrac{du}{dx}$ を計算するのに合成関数の微分 (つまり (1)) をやります.

(イ)　$3x-2=u$ とおくと，$y=\cos^3 u$.

この場合，$\dfrac{dy}{du}$ を計算するのに合成関数の微分 (つまり (2)) をやります.

このような意味で，(3) は (1) と (2) が合わさったような感じです.

解 1 (慎重派)

$\cos(3x-2)=u$ とおくと，$y=u^3$

$$\frac{dy}{du}=3u^2$$
$$\frac{du}{dx}=-\sin(3x-2)\cdot(3x-2)'$$
$$=-3\sin(3x-2)$$

なので，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$
$$=3u^2\cdot(-3\sin(3x-2))$$
$$=-9\cos^2(3x-2)\sin(3x-2)$$

解 2 (慎重派)

$3x-2=u$ とおくと，$y=\cos^3 u$

$$\frac{dy}{du}=3\cos^2 u\cdot(\cos u)'$$
$$=-3\cos^2 u\sin u$$
$$\frac{du}{dx}=3$$

なので，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$
$$=-3\cos^2 u\sin u\cdot 3$$
$$=-9\cos^2(3x-2)\sin(3x-2)$$

■

このように，どのように置き換えしても，機械的に処理できるのが「慎重派」の利点と言えますが，やはり「ザックリ派」で一気にやってほしいところです.

7　e の定義

いきなりですが，次の極限値はどうなるのでしょうか．

$$\lim_{h \to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$$

残念ながら，これまでの手法ではこの極限値を計算することは不可能です．コンピュータなどを駆使して数値計算をすると，「ある値に収束するであろう」ということが予想されます．実は，

$$\lim_{h \to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} \text{ はある無理数に収束する}$$

ことが証明されています．「なぜ無理数なのか」「なぜ収束するのか」は，ひとまず保留して，**とりあえず，この事実を認める**ことにします．つまり，

▷Point◁(e の定義 ①)

$$e = \lim_{h \to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$$

と定める．この e を『ネイピアの定数』または『自然対数の底』と呼ぶ．
おおよその値は $e = 2.718281828459045\cdots$ で，これは無理数である．

この事実を踏まえると，次の関係式が導かれます．

▷Point◁(e の関係式)

$\boxed{\text{関係式 ①}}$　$$\lim_{x \to \pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$\boxed{\text{関係式 ②}}$　$$\lim_{t \to 0}\frac{\log_e(1+t)}{t} = 1$$

$\boxed{\text{関係式 ③}}$　$$\lim_{h \to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$$

$\boxed{\text{関係式 ①}}$ の証明．　$\dfrac{1}{x} = h$ とおく．
$x \longrightarrow \infty$ のとき，$h \longrightarrow +0$ なので，

$$\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{h \to +0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

$x \longrightarrow -\infty$ のとき，$h \longrightarrow -0$ なので，

$$\lim_{x \to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{h \to -0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

注 $\lim_{h \to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$ であるということは，

$$\lim_{h \to +0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h \to -0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

であることを意味しています．

$\boxed{\text{関係式 ②}}$ の証明

$$\begin{aligned}\lim_{t \to 0}\frac{\log_e(1+t)}{t} &= \lim_{t \to 0}\frac{1}{t}\log_e(1+t)\\ &= \lim_{t \to 0}\log_e(1+t)^{\frac{1}{t}}\\ &= \lim_{t \to 0}\log_e e\\ &= 1\end{aligned}$$

$\boxed{\text{関係式 ③}}$ の証明

$e^h - 1 = t$ とおくと，$h \to 0$ のとき $e^h \to 1$ だから，$t \to 0$．このとき，$e^h = 1+t$ より $h = \log_e(1+t)$ なので，

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0}\frac{e^h-1}{h} &= \lim_{t \to 0}\frac{t}{\log_e(1+t)}\\ &= \lim_{t \to 0}\frac{1}{\frac{\log_e(1+t)}{t}}\\ &= \frac{1}{1} = 1\end{aligned}$$

■

このように，e の定義 ① から，
$\boxed{\text{関係式 ①}}$，$\boxed{\text{関係式 ②}}$，$\boxed{\text{関係式 ③}}$ を導くことができました．これら 4 つの関係式はすべて対等です (数学ではこのことを同値という)，

注 $\boxed{\text{関係式 ①}}$ の $x \longrightarrow \infty$ の方を e の定義として採用する場合もあります．どちらの定義も重要です．

▷Point◁(e の定義 (決定版))

$$e = \lim_{h \to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$$

または

$$e = \lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

の両方を使い分ける．

定義が2つあるのは変な話なんですが，まあ，あまり気にせず両方使えるようにしといてください．

重要な問題を紹介しよう．

例 題 $\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}=e$ を用いて，次の極限値を求めよ．
(1) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$
(2) $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$
(3) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$

解 (1)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$$

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ なので，求める極限値は $\frac{1}{e}$．

注 先ほどの $\boxed{\text{関係式①}}$ は公式として利用してかまわないでしょう．

(2) $2x=t$ とおくと，$x\longrightarrow 0$ のとき，$t\longrightarrow 0$ だから，

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{2}{t}}=\lim_{t\to 0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^2$$

$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$ なので，求める極限値は e^2．

(3) $t=-\frac{2}{x}$ とおくと，$x\longrightarrow\infty$ のとき，$t\longrightarrow -0$ だから，

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{t\to -0}(1+t)^{-\frac{2}{t}}=\lim_{t\to -0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^{-2}$$

$\lim_{t\to -0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$ なので，求める極限値は e^{-2}．

■

参考 先ほど，e の定義として

$$e=\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$$

と定め，次の3つの関係式を導きました．

$\boxed{\text{関係式①}}$　$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

$\boxed{\text{関係式②}}$　$\lim_{t\to 0}\frac{\log_e(1+t)}{t}=1$

$\boxed{\text{関係式③}}$　$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$

高校では，これらを e の定義としてスタートするのですが，大学ではちょっと状況が変わってきます．

大学では e の定義は次のようにするのが一般的です．

▷Point◁(大学での e の定義)

$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ とするとき，数列 $\{a_n\}$ は必ず収束し，その極限値を e と定める．すなわち，

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

である．

「あれっ，先ほどの $\boxed{\text{関係式①}}$ と同じやん」と思うかもしれませんが違います．よく見てください．$\boxed{\text{関係式①}}$ が実数についての極限であるのに対し，今回の定義は自然数 n について極限になっています．微妙に世界が異なっています．

また，次のように定義する場合もあります．

▷Point◁(大学での e の定義)

無限級数 $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$ は必ず収束し，その極限値を e と定める．すなわち，

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

である．

いずれの定義でも，数列 $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ や無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ が必ず収束することがポイントですが，その証明には「上に有界な単調増加数列は収束する」という定理を使います．この定理は高校段階では扱わないので，このことが，これらの定義を高校で取り扱わない理由の一つかもしれません．しかしながら，高校における e の定義も $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ が無理数に「収束すること」を証明もせずに前提としているので，どっちにしろ曖昧さは残ってしまいます．

8　指数関数・対数関数の微分

指数関数・対数関数の微分は，底が e であるのか，ないのか，で大きく様子が変わってきます．

8.1　底が e の場合

【例】　$y=e^x$ を定義に従って微分せよ．

解 $f(x)=e^x$ とおくと，導関数の定義より，

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h} \\ &= e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} \\ &= e^x\cdot 1 \\ &= e^x \end{aligned}$$

つまり，

$$(e^x)'=e^x$$

■

注　先ほどの e の $\boxed{\text{関係式③}}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

を利用しています．

指数関数 $y=e^x$ は微分しても $y'=e^x$．なんと！全く同じ形です．微分しても形が変わらない関数は極めて珍しく，これは奇跡に近い現象です．やっぱり，e ってすごい！すごい！

参考　微分しても不変な関数は，$y=e^x$ 以外にもあるのか，ないのか，はなかなか難しい問題です．気になる人はまたご相談ください．

【例】　$y=\log_e x$ を逆関数の微分公式を用いて微分せよ．

解

$$y=\log_e x \iff x=e^y$$

なので，

$$\frac{dx}{dy}=\frac{d}{dy}e^y=e^y$$

逆関数の微分公式 $\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dy}=1$ より，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{x}$$

よって，

$$(\log_e x)'=\frac{1}{x}$$

■

ここでも，底を e にすることできわめて単純な結果が得られました．それにしても，なぜ対数関数を微分すれば分数関数になるのでしょうか．不思議な感じがしませんか？やっぱり，e ってすごい！すごい！

この e を底にした対数を**自然対数**とよびます．**今後，主として自然対数のみを扱うので，底を省略して $\log x$ と書きます．**

参考　10 を底とする対数を常用対数と呼びました．自然対数とは全く異なるので混同しないように．なお，常用対数との混乱を避けるために，底を e とする自然対数のことを，$\ln x$, $\ln(x)$ と書くこともあります．これは自然対数 (natural logarithm) の略記号です．

▷Point◁ (指数関数・対数関数の微分)

底が e の場合

$$(e^x)'=e^x \qquad (\log x)'=\frac{1}{x}$$

8.2　底が e ではない場合

底が e ではない場合はどうなるのか考えよう．例えば，底を 2 として考えてみよう．

【例】　$y = \log_2 x$ を微分せよ．

考え方　底が e の場合の微分公式を利用するため，底の変換公式を利用します．

解　底の変換公式より

$$y = \log_2 x = \frac{\log x}{\log 2} = \frac{1}{\log 2} \cdot \log x$$

なので，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \log 2}$$

よって，

$$(\log_2 x)' = \frac{1}{x \log 2}$$

■

【例】　$y = 2^x$ を微分せよ．

解

$$y = 2^x \iff x = \log_2 y$$

なので，

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}(\log_2 y) = \frac{1}{y \log 2}$$

逆関数の微分公式 $\dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dy} = 1$ より，

$$\frac{dy}{dx} = y \log 2 = 2^x \log 2$$

よって，

$$(2^x)' = 2^x \log 2$$

■

▷Point◁(指数関数・対数関数の微分)

底が e ではない場合

$$(a^x)' = a^x \log a \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}$$

このように，底が e であるのか，ないのかによって，ずいぶん状況が異なっています．e 自体は，わけがわからない数でしたが，底が e の場合の方が，微分がとても簡単です．なので，今後は e をメインに考えていきます．

✎注　$\log e = 1$ なので，$y = a^x$ と $y = \log_a x$ の微分公式で $a = e$ を代入すれば，

$$(e^x)' = e^x \log e = e^x \qquad (\log_e x)' = \frac{1}{x \log e} = \frac{1}{x}$$

となり，底が e の場合の公式が導き出されます．つまり，$y = a^x$ と $y = \log_a x$ の微分公式は $a = e$ の場合も成立していることがわかります．

対数関数の微分について，もう少し考察しよう．

8.3　$y = \log|x|$ の微分

【例】　$y = \log|x|$ と $y = e^{|x|}$ のグラフをかけ．そして，微分できるか考察せよ．

考え方　関数のグラフを書くときはまずは**定義域を確認する**必要があります．

解

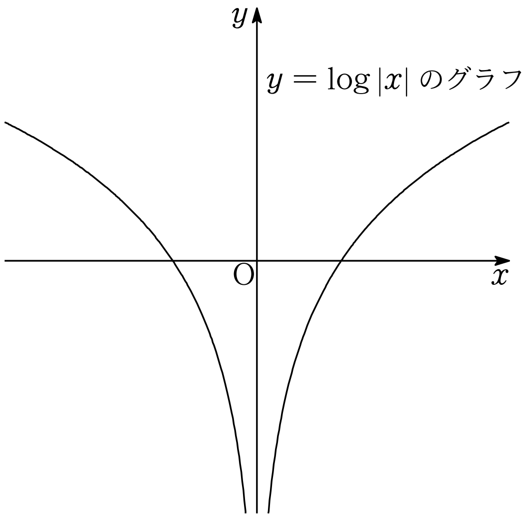
$\boxed{y = \log|x| \text{ のグラフについて}}$

真数 > 0 より，$|x| > 0$．つまり，$x \neq 0$．

$x > 0$ のとき，$y = \log|x| = \log x$

$x < 0$ のとき，$y = \log|x| = \log(-x)$

したがって，$y = \log|x|$ のグラフは下図のようになる．



✏注 $y = \log x$ と $y = \log(-x)$ は y 軸対称なグラフです．

✏注 $y = \log|x|$ は定義域内のすべての点で連続な関数です ($x = 0$ は定義域内の点ではないので考える必要がありません)．

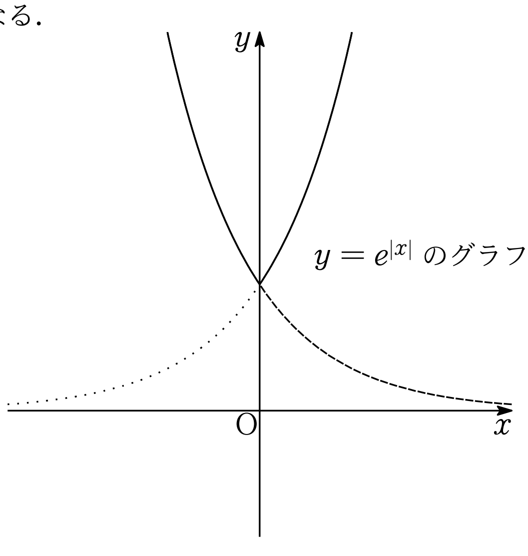
$\boxed{y = e^{|x|} \text{ のグラフについて}}$

まず定義域は，**すべての実数**である．

$x \geqq 0$ のとき，$y = e^{|x|} = e^{x}$

$x < 0$ のとき，$y = e^{|x|} = e^{-x}$

したがって，$y = e^{|x|}$ のグラフは下図のようになる．



✏注 $y = e^{x}$ と $y = e^{-x}$ は y 軸対称なグラフです．

✏注 $y = e^{|x|}$ は定義域内のすべての点で連続な関数です．

この 2 つのグラフをみて気づくことは，まず，$y = \log|x|$ のグラフが定義域内のいたるところ滑らかであることです ($x = 0$ は定義域内の点ではないので考える必要がありません)．普通，絶対値を含む関数の場合，どっかに尖がった箇所があることが多いのですが，$y = \log|x|$ のグラフはそんなことなく，いたるところ滑らかです．

逆に，$y = e^{|x|}$ のグラフを見ると，$x = 0$ でとんがっています．

このことはつまり，関数 $y = \log|x|$ が**定義域内のすべての点で微分可能**であること，関数 $y = e^{|x|}$ は $x = 0$ **で微分不可能**であることを意味しています．

▷Point◁

$y = \log|x|$ の定義域は $x \neq 0$．

定義域内のすべての点で連続かつ微分可能．

$y = e^{|x|}$ の定義域はすべての実数．

定義域内のすべての点で連続だが，$x = 0$ でのみ微分不可能．

それでは，$y = \log|x|$ は定義域内のすべての点で微分可能なので，さっそく，$y = \log|x|$ を微分してみよう．

解

$x > 0$ のとき，$y = \log x$ なので，$y' = \dfrac{1}{x}$

$x < 0$ のとき，$y = \log(-x)$ なので，

$$y' = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$$

したがって，いずれの場合においても，$y' = \dfrac{1}{x}$ であるので，

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x}$$

■

▷Point◁(対数関数の微分 (おまけ))

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a|x|)' = \frac{1}{x\log a}$$

つまり，対数関数の場合，真数部分に絶対値があってもなくても微分した結果は同じなので，結局のところ，あんまり気にしなくて構いません．

✏注 じゃあ，なんでわざわざ log の時だけ絶対値を考えたねん？って話ですが，不定積分を学習するときに，その意味が分かるでしょう．

✏注　先ほど，グラフの形を見て，$y=e^{|x|}$ は $x=0$ で微分不可能であると言いましたが，本来は，グラフの形を見て判断するのではなく，キチンと計算で示されるべきことです．つまり，

$x>0$ のとき，$y=e^x$ なので，$y'=e^x$

$x<0$ のとき，$y=e^{-x}$ なので，

$$y'=e^{-x}(-x)'=-e^{-x}$$

したがって，

$$\lim_{x\to+0}y'=e^0=1$$

$$\lim_{x\to-0}y'=-e^0=-1$$

$$\therefore\ \lim_{x\to+0}y'\fallingdotseq\lim_{x\to-0}y'$$

このことは，関数 $y=e^{|x|}$ の微分係数が $x=0$ の前後で変化する，つまり $x=0$ で**微分不可能**であることを意味しています．

それでは，指数・対数関数の微分公式が完成したので，いくつか代表的な例を紹介しよう．

【例】　次の関数を微分せよ．

(1) $y=x^2e^x$　(2) $y=\dfrac{\log x}{x}$

(3) $y=e^{-3x}$　(4) $y=\log 4x$

(5) $y=(\log x)^2$

(6) $y=\log\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$

解　いずれも基本です．

(1) 当然，積の微分公式です．

$$\frac{dy}{dx}=(x^2)'e^x+x^2(e^x)'=(x^2+2x)e^x$$

(2) 当然，商の微分公式です．

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(\log x)'x-\log x(x)'}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$$

(3) 当然，$-3x$ を「ひとまとめ」に考えてザックリ微分です．

$$\frac{dy}{dx}=e^{-3x}\cdot(-3x)'=-3e^{-3x}$$

(4) 当然，$4x$ を「ひとまとめ」に考えてザックリ微分です．

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4x}\cdot(4x)'=\frac{1}{x}$$

✏注　$y=\log 4x=\log 4+\log x$ と考えれば，当然の結果ですね．

(5) 当然，$\log x$ を「ひとまとめ」に考えてザックリ微分です．

$$\frac{dy}{dx}=2(\log x)(\log x)'=\frac{2\log x}{x}$$

(6) 絶対値は無視してよいので，$\dfrac{x-1}{x+1}$ を「ひとまとめ」に考えてザックリ微分すると

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{x-1}{x+1}}\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'$$

となり，再度，商の微分を施すことになります．しかし，もっと簡単に微分することができます．

$$y=\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|=\log|x-1|-\log|x+1|$$

なので

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

■

底が e でない場合もやっておこう．

【例】　次の関数を微分せよ．

(1) $y=2^{3x}$　(2) $y=\log_3(2x-1)$

解　底が e でない場合は，そんなに登場しませんが，微分だけはできるようになっておこう．

(1) 当然，$3x$ を「ひとまとめ」に考えてザックリ微分です．

$$\frac{dy}{dx}=2^{3x}(\log 2)\cdot(3x)'=3(\log 2)2^{3x}$$

(2) 当然，$2x-1$ を「ひとまとめ」に考えてザックリ微分です．

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(2x-1)'}{(2x-1)\log 3}=\frac{2}{(2x-1)\log 3}$$

■

最後に，三角関数と指数・対数関数が融合した関数の微分やっておこう．次の2つは今後，頻繁に登場する重要関数です．

【例】　次の関数を微分せよ．

(1) $y=e^{-x}\sin x$

(2) $y=\log|\cos x|$

解

(1)
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=(e^{-x})'\sin x+e^{-x}(\sin x)'\\&=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x\\&=e^{-x}(-\sin x+\cos x)\end{aligned}$$

(2)
$$\frac{dy}{dx}=\frac{(\cos x)'}{\cos x}=\frac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$$

■

参考 e の導入についての補足

指数関数 $y=f(x)=a^x$ （$a>0$，$a \fallingdotseq 1$）を定義に従って微分してみよう．

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h}\\&=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$ の値がわかれば $y=a^x$ の微分が完成します．

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$ は a によって定まる定数です．

では，a の値によって具体的にどんな値になるのか，数式処理ソフト *Mathematica* で計算してみました（でないと無理です）．すると，右の表のようになります．

右の表からもわかるように，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$ の値は a によって様々な値をとります．しかも全部わけわかんない値ばかりで，こんなのいちいち覚えてられません．

そこで，大胆にも「**$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=1$ となるような a を勝手に設定しよう**」と考えるのです．

表を見れば「**そのような a はおそらく 2 と 3 の間にありそうだ**」ということがわかります．

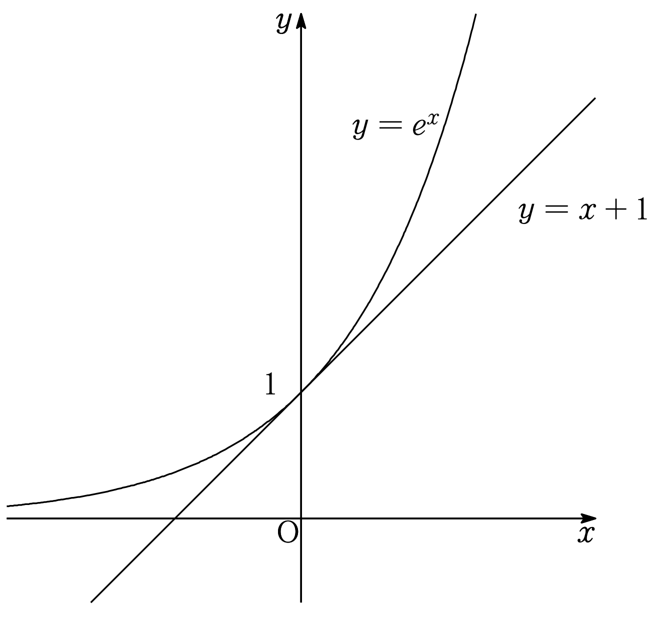
そこで，次のように e を定義します．

▷Point◁(e の定義)

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=1$ となるような a の値を e と定める．すなわち，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$ である．

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^h-a^0}{h-0}$ とかけるので，極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$ は $y=a^x$ の $x=0$ における接線の傾きを意味しています．$y=2^x$ と $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ は共に（0，1）を通る y 軸対称なグラフなので，$x=0$ における接線も y 軸対称です．したがって，先ほどの表で $a=2$ と $a=\frac{1}{2}$ のところの値が異符号になっているのです．$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=1$ となるような a の値を e と定めるということは，$y=a^x$ の $x=0$ における接線の傾きが 1 になるような a の値を e にしようということなのです．

a	$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$
…	………
$\frac{1}{5}$	$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^h-1}{h}=-1.60944$
$\frac{1}{4}$	$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^h-1}{h}=-1.38629$
$\frac{1}{3}$	$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^h-1}{h}=-1.09861$
$\frac{1}{2}$	$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^h-1}{h}=-0.69315$
2	$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{2^h-1}{h}=0.69315$
3	$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{3^h-1}{h}=1.09861$
4	$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{4^h-1}{h}=1.38629$
5	$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{5^h-1}{h}=1.60944$
…	………



9　演習問題

現在，関数の微分を学習していますが，微分することが目標ではありません．今後，関数を微分して，接線を求めたり，グラフを描いたりします．ですので，微分を間違えると全てがパーになります．だから，微分は絶対に間違えてはいけません．「絶対に」です．実際には，そんなに複雑な関数は入試に登場することはないので，とにかく「基本的な関数を正確に微分できること」が重要です．

現時点では，以下の関数の微分が正確にできれば十分でしょう．

9.1　基本編

例題　次の関数を微分せよ．

(1) $y=2x-\cos x$　(2) $y=\sin x-\tan x$　(3) $y=\cos(2x-1)$

(4) $y=\tan 3x$　(5) $y=\cos(\sin x)$　(6) $y=\sin x^2$

(7) $y=\tan x^2$　(8) $y=\cos^3 x$　(9) $y=\tan^3 x$

(10) $y=\dfrac{1}{\cos x}$　(11) $y=\dfrac{1}{\sin^2 x}$　(12) $y=x\sin 2x$

(13) $y=\sin x\cos x$　(14) $y=\sin 3x\cos 5x$

解

(1) $y'=2+\sin x$　(2) $y'=\cos x-\dfrac{1}{\cos^2 x}$　(3) $y'=-2\sin(2x-1)$

(4) $y'=\dfrac{3}{\cos^2 3x}$　(5) $y'=-\cos x\sin(\sin x)$　(6) $y'=2x\cos x^2$

(7) $y'=\dfrac{2x}{\cos^2 x^2}$　(8) $y'=-3\cos^2 x\sin x$　(9) $y'=\dfrac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}$

(10) $y'=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$　(11) $y'=-\dfrac{2\cos x}{\sin^3 x}$　(12) $y'=\sin 2x+2x\cos 2x$

(13) $y'=\cos 2x$　(14) $y'=3\cos 3x\cos 5x-5\sin 3x\sin 5x$

■

例題　次の関数を微分せよ．ただし，a は定数で，$a>0$，$a\neq 1$ とする．

(1) $y=\log(x^2+2)$　(2) $y=\log\left|\dfrac{2x-1}{2x+1}\right|$　(3) $y=\log|x^2-4|$

(4) $y=\log(\sin x)$　(5) $y=(\log x)^3$　(6) $y=(x\log x-x)^2$

(7) $y=e^{4x}$　(8) $y=(x+3)e^{-x}$　(9) $y=x^2e^x$

(10) $y=e^x\cos x$　(11) $y=e^x\tan x$　(12) $y=e^{x^2+2x}$

(13) $y=\log_4 2x$　(14) $y=\log_a(x^2-1)$　(15) $y=a^{-3x}$

解

(1) $y'=\dfrac{2x}{x^2+2}$　(2) $y'=\dfrac{4}{4x^2-1}$　(3) $y'=\dfrac{2x}{x^2-4}$

(4) $y'=\dfrac{\cos x}{\sin x}$　(5) $y'=\dfrac{3(\log x)^2}{x}$　(6) $y'=2(x\log x-x)\log x$

(7) $y'=4e^{4x}$　(8) $y'=-(x+2)e^{-x}$　(9) $y'=x(2+x)e^x$

(10) $y'=e^x(\cos x-\sin x)$　(11) $y'=e^x\left(\tan x+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)$　(12) $y'=2(x+1)e^{x^2+2x}$

(13) $y'=\dfrac{1}{2x\log x}$　(14) $y'=\dfrac{2x}{(x^2-1)\log a}$　(15) $y'=-3a^{-3x}\log a$

■

✏注　以上の問題の解答は，別途，「犬プリ」で詳しく解説するので，そちらを参考にしてください．

9.2　応用編

「基本編じゃ物足りないよ～」という人のために，やや難しい関数の微分に挑戦してみよう．まあ，難しいと言っても，ちょっと工夫するだけなんですけどね．これができれば十分です．勉強のために，できるだけ複数の方法でやってみたいと思います．

例題　次の関数を微分せよ．ただし，a，b は定数で，$a>0$，$a \fallingdotseq 1$ とする．

(1)　$y=\sin^2 3x$　(2)　$y=\sin^5 x\cos 5x$　(3)　$y=\sin^4 x\cos^4 x$

(4)　$y=\sqrt{1+\sin^2 x}$　(5)　$y=\sin\sqrt{x^2+x+1}$　(6)　$y=\left(\tan x+\dfrac{1}{\tan x}\right)^2$

(7)　$y=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$　(8)　$y=\dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}$

(9)　$y=e^{-2x}\sin 2x$　(10)　$y=10^{\sin x}$　(11)　$y=\log_x a$

(12)　$y=\log(\log x)$　(13)　$y=\log_a(\sin x)$　(14)　$y=\log(1-\cos x)$

(15)　$y=\log_a(x+\sqrt{x^2-a^2})$　(16)　$y=\log\dfrac{x^2-b}{x^2+b}$

考え方　すべて「ザックリ微分」でやります．

✏注　「自分で解いた時と答えの形が違う」「どこまで微分すれば良いんですか」という声をよく聞きます．別にどこで止めても良いんですが，最初に言ったように，この後で $y'=0$ を解く羽目になるので，$y'=0$ が解けるような形にまで変形しておくのが，今後のためだと思います．

解

(1)

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=2\sin 3x\cdot(\sin 3x)'\\&=2\sin 3x\cdot\cos 3x\cdot(3x)'\\&=6\sin 3x\cos 3x\\&=3\sin 6x\end{aligned}$$

✏注　半角の公式を利用すればもっと簡単にできます．

$y=\sin^2 3x=\dfrac{1-\cos 6x}{2}$ なので，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-(-\sin 6x)\cdot(6x)'}{2}=3\sin 6x$$

(2)

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=(\sin^5 x)'\cos 5x+\sin^5 x(\cos 5x)'\\&=5\sin^4 x(\sin x)'\cos 5x+\sin^5 x(-\sin 5x)(5x)'\\&=5\sin^4 x\cos x\cos 5x-5\sin^5 x\sin 5x\\&=5\sin^4 x(\cos x\cos 5x-\sin x\sin 5x)\\&=5\sin^4 x\cos 6x\end{aligned}$$

(3)

$$y=(\sin x\cos x)^4=\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^4=\frac{\sin^4 2x}{16}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{4\sin^3 2x\cdot(\sin 2x)'}{16}\\&=\frac{4\sin^3 2x\cdot\cos 2x\cdot(2x)'}{16}\\&=\frac{8\sin^3 2x\cdot\cos 2x}{16}\\&=\frac{\sin^3 2x\cdot\cos 2x}{2}\end{aligned}$$

✏注　これは明らかに最初に 2 倍角の公式で変形しておいた方が良いでしょう．ちなみに，そのまま微分すると次のようになります．

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=(\sin^4 x)'\cos^4 x+\sin^4 x(\cos^4 x)'\\&=4\sin^3 x(\sin x)'\cos^4 x+\sin^4 x4\cos^3 x(\cos x)'\\&=4\sin^3 x\cos^5 x-4\sin^5 x\cos^3 x\\&=4\sin^3 x\cos^3 x(\cos^2 x-\sin^2 x)\\&=4\sin^3 x\cos^3 x\cos 2x\end{aligned}$$

先ほどの答えと形が違いますが，同じことです．

(4)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(1+\sin^2 x)'}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}=\frac{2\sin x(\sin x)'}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}=\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$$

(5)

$$\frac{dy}{dx}=\cos\sqrt{x^2+x+1}\cdot\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)'=\cos\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{(x^2+x+1)'}{2\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{(2x+1)\cos\sqrt{x^2+x+1}}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

(6)

$$\tan x+\frac{1}{\tan x}=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{\sin x\cos x}=\frac{2}{\sin 2x}$$

よって，$y=\dfrac{4}{\sin^2 2x}=4\sin^{-2}2x$

$$\frac{dy}{dx}=-8\sin^{-3}2x(\sin 2x)'=-8\sin^{-3}2x\cdot\cos 2x(2x)'=-\frac{16\cos 2x}{\sin^3 2x}$$

➾注　これもいきなり微分するのではなく，最初に変形してから微分した方が良いです．もし，そのままやれば，次のようになります．

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=2\left(\tan x+\frac{1}{\tan x}\right)\left(\tan x+\frac{1}{\tan x}\right)'\\&=2\left(\tan x+\frac{1}{\tan x}\right)\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\\&=2\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)\left(\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}\right)\\&=2\left(\frac{1}{\sin x\cos x}\right)\left(\frac{-\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\right)\\&=\frac{-2\cos 2x}{\cos^3 x\sin^3 x}\\&=\frac{-16\cos 2x}{8\cos^3 x\sin^3 x}\\&=\frac{-16\cos 2x}{\sin^3 2x}\end{aligned}$$

➾注　$\left(\dfrac{1}{\tan x}\right)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ は覚えておこう．

(7)

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{(\cos x)'(1-\sin x)-\cos x(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2}\\&=\frac{-\sin x(1-\sin x)-\cos x(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}\\&=\frac{-\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x}{(1-\sin x)^2}\\&=\frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2}\\&=\frac{1}{1-\sin x}\end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{(1-\sin x)'(1+\cos x)-(1-\sin x)(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}\\&=\frac{-\cos x(1+\cos x)-(1-\sin x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}\\&=\frac{-\cos x-\cos^2 x+\sin x+\cos^2 x}{(1+\cos x)^2}\\&=\frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2}\\&=\frac{1}{1-\sin x}\end{aligned}$$

(9)

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\left(e^{-2x}\right)'\sin 2x+e^{-2x}(\sin 2x)'\\&=e^{-2x}(-2x)'\sin 2x+e^{-2x}\cos 2x(2x)'\\&=-2e^{-2x}\sin 2x+2e^{-2x}\cos 2x\\&=2e^{-2x}(-\sin 2x+\cos 2x)\end{aligned}$$

(10)

$$\frac{dy}{dx}=10^{\sin x}\log 10\cdot(\sin x)'=(\log 10)10^{\sin x}\cos x$$

(11)

$y=\log_x a=\dfrac{\log a}{\log x}$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\log a\cdot(\log x)'}{(\log x)^2}=-\frac{\log a}{x(\log x)^2}$$

(12)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(\log x)'}{\log x}=\frac{1}{x\log x}$$

(13)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(\sin x)'}{\sin x\cdot\log a}=\frac{\cos x}{(\log a)\sin x}$$

(14)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(1-\cos x)'}{1-\cos x}=\frac{\sin x}{1-\cos x}$$

(15)

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)'}{\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\log a}\\&=\frac{1+\dfrac{(x^2-a^2)'}{2\sqrt{x^2-a^2}}}{\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\log a}\\&=\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}}{\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\log a}\\&=\frac{\sqrt{x^2-a^2}+x}{\sqrt{x^2-a^2}\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\log a}\\&=\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}\log a}\end{aligned}$$

(16)

$$y=\log\frac{x^2-b}{x^2+b}=\log(x^2-b)-\log(x^2+b)$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{(x^2-b)'}{x^2-b}-\frac{(x^2+b)'}{x^2+b}\\&=\frac{2x}{x^2-b}-\frac{2x}{x^2+b}\\&=\frac{2x\{(x^2+b)-(x^2-b)\}}{(x^2-b)(x^2+b)}\\&=\frac{4bx}{(x^2-b)(x^2+b)}\end{aligned}$$

■

少しページが余ったので，もうちょっと追加．

$\boxed{\text{例題}}$ 次の関数を微分せよ．

(1) $y=\sin(x+a)\cos(x-a)$

(2) $y=\sqrt{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$

解

(1) 三角関数の和積公式

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

より，

$$y=\sin(x+a)\cos(x-a)=\frac{1}{2}(\sin 2x+\sin 2)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\cos 2x\cdot(2x)'=\cos 2x$$

注 上の解答では和積公式を使いましたが，もし使わないのであれば，次のようになります．

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=(\sin(x+a))'\cos(x-a)\\&\qquad+\sin(x+a)(\cos(x-a))'\\&=\cos(x+a)\cos(x-a)-\sin(x+a)\sin(x-a)\\&=\cos\{(x+a)+(x-a)\}\\&=\cos 2x\end{aligned}$$

最後のところで，cos の加法定理に気づくかどうか．気づかずに展開とかすると大変なことになります．

(2)

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)'}{2\sqrt{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}}\\&=\frac{a^2\cdot 2\cos x(\cos x)'+b^2\cdot 2\sin x(\sin x)'}{2\sqrt{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}}\\&=\frac{a^2\cos x(-\sin x)+b^2\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}}\\&=\frac{(b^2-a^2)\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}}\end{aligned}$$

■

以上で，微分の演習は終わりです．最初に言いましたが，微分は絶対にミスは許されません．早く正確に微分できるように繰り返し練習してください．あとは，実際の場で経験を積んでいきましょう．

10　その他の微分公式

10.1　対数微分法

分母分子が多項式の積や累乗の形になっている関数や指数のゴチャゴチャした複雑な関数を微分する際，対数をとってから微分すると計算が楽になることがあります．この方法を『対数微分法』といいます．次の 例題 を通常の微分と『対数微分法』の 2 通りの方法でやってみよう．

例題　次の関数を微分せよ．

(1)　$y=\dfrac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^4}$　　(2)　$y=\dfrac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$

解 1（通常の微分）

(1)

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{\{(x-1)(x+3)^3\}'(x+2)^4-(x-1)(x+3)^3\{(x+2)^4\}'}{(x+2)^8}\\
&= \frac{\{(x+3)^3+(x-1)\cdot 3(x+3)^2\}(x+2)^4-(x-1)(x+3)^3\cdot 4(x+2)^3}{(x+2)^8}\\
&= \frac{\{(x+3)^3+(x-1)\cdot 3(x+3)^2\}(x+2)-4(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^5}\\
&= \frac{(x+3)^2\{(x+3)+3(x-1)\}(x+2)-4(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^5}\\
&= \frac{(x+3)^2(4x)(x+2)-4(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^5}\\
&= \frac{4(x+3)^2\{x(x+2)-(x-1)(x+3)\}}{(x+2)^5}\\
&= \frac{4(x+3)^2\{x^2+2x-(x^2+2x-3)\}}{(x+2)^5}\\
&= \frac{12(x+3)^2}{(x+2)^5}
\end{aligned}$$

(2)　$y=\dfrac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}=\dfrac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{x'(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}-x\left\{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}\right\}'}{\left\{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}\right\}^2}\\
&= \frac{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}-x\cdot\frac{3}{2}(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x}{(a^2+x^2)^3}\\
&= \frac{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\{(a^2+x^2)-3x^2\}}{(a^2+x^2)^3}\\
&= \frac{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}(a^2-2x^2)}{(a^2+x^2)^3}\\
&= \frac{a^2-2x^2}{(a^2+x^2)^{\frac{5}{2}}}
\end{aligned}$$

商の微分，積の微分，合成関数の微分の公式に当てはめて，淡々と計算するだけなので，落ち着いてやればできなくはないですが，計算がかなり煩雑になります．(1) は多項式の係数が全て 1 だったからまだマシな方で，(2) は指数が煩雑だし，ノーミスで正解にたどり着くのは結構難しいでしょう（正直，僕も最初は間違えました）．

解 2（対数微分法）

(1) 両辺の絶対値の自然対数をとると，

$$\log|y| = \log\left|\frac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^4}\right|$$
$$= \log|x-1| + 3\log|x+3| - 4\log|x+2|$$

両辺を x で微分すると，

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x+3} - \frac{4}{x+2}\\ &= \frac{x+3+3(x-1)}{(x-1)(x+3)} - \frac{4}{x+2}\\ &= \frac{4x}{(x-1)(x+3)} - \frac{4}{x+2}\\ &= \frac{4x(x+2)-4(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)(x+2)}\\ &= \frac{4(x^2+2x)-4(x^2+2x-3)}{(x-1)(x+3)(x+2)}\\ &= \frac{12}{(x-1)(x+3)(x+2)}\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}y' &= y\cdot\frac{12}{(x-1)(x+3)(x+2)}\\ &= \frac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^4}\cdot\frac{12}{(x-1)(x+3)(x+2)}\\ &= \frac{12(x+3)^2}{(x+2)^5}\end{aligned}$$

(2) 両辺の絶対値の自然対数をとると，

$$\begin{aligned}\log|y| &= \log\left|\frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right|\\ &= \log\frac{|x|}{|a^2+x^2|^{\frac{3}{2}}}\\ &= \log|x| - \frac{3}{2}\log|a^2+x^2|\end{aligned}$$

両辺を x で微分すると，

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= \frac{1}{x} - \frac{3}{2}\frac{(a^2+x^2)'}{a^2+x^2}\\ &= \frac{1}{x} - \frac{3}{2}\frac{2x}{a^2+x^2}\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}y' &= y\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{2}\frac{2x}{a^2+x^2}\right)\\ &= \frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{2}\frac{2x}{a^2+x^2}\right)\\ &= \frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{(a^2+x^2)-3x^2}{x(a^2+x^2)}\\ &= \frac{a^2-2x^2}{(a^2+x^2)^{\frac{5}{2}}}\end{aligned}$$

■

注

$$(\log|y|)' = \frac{y'}{y}$$

について．なぜ，$\log|y|$ を x で微分すると $\dfrac{y'}{y}$ になるか分かりますか．

それは，もともと**y 自体が x の関数**だからです

$$(\log|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

という合成関数の微分公式はすでに知っているはず．$f(x)$ は x の関数です．だから，y が x の関数なので，この公式で $f(x)$ を y に置き換えた，

$$(\log|y|)' = \frac{y'}{y}$$

という式が成立するのです．

以上，通常の微分と『対数微分法』の 2 通りを紹介しました．確かに，『対数微分法』の方が計算が（少しだけ）楽な気がしますが，微分できさえすればそれで良いので，指定がなければ好きな方法でやってください．でも，log を付けるメリットは自覚しておいてほしいところ．つまり，「積や商が，和や差に分解できる」「指数が前に下りてくる」ということです．よって，**指数や累乗根をたくさん含む分数式などの場合は『対数微分法』を用いたほうが計算ミスは少ない**と言えるでしょう．

【例】　α が実数のとき，$y = x^\alpha$ $(x > 0)$ を微分せよ．

$\boxed{\text{考え方}}$ 「$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ に決まってるやん．何をいまさら・・・」と思うかもしれませんが，ちょっと待った！指数が「有理数」の場合に成立することは証明できてますが，「無理数」の場合の証明がまだ

です．だから，α が実数の場合に，$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$ となるかどうかはまだ分かりません．

しかし『対数微分法』を用いると，指数が実数の場合にでも成立することが証明できます．ていうか，『対数微分法』なんて大げさな方法を使わないと，指数が実数の場合を証明できない，という現実に数学の奥深さを感じるのは僕だけでしょうか．

解　$x > 0$ なので，$y = x^p$ の両辺の自然対数をとると，

$$\log y = \log x^p = p \log x$$

両辺を x で微分して，

$$\frac{y'}{y} = \frac{p}{x}$$

したがって，

$$y' = \frac{py}{x} = \frac{px^p}{x} = px^{p-1}$$

■

したがって，次の基本公式が得られます．

▷Point◁(x^{α} の微分)

> α を実数とするとき，
>
> $$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$$
>
> が成立する．

参考　x^{α} の微分は，数学 II では $\alpha = 1, 2, 3$ だけだったのを，まずは α を自然数全体に拡張し，次に整数全体，有理数全体へと更なる拡張を続け，ようやく**実数全体にまで到達**しました．とりあえずこれで終わりです．長かったですね．

でも，さらなる拡張は可能でしょうか？そう，複素数です．さすがに指数を複素数にまで拡張するには少し無理がありますが (ていうか，$y = x^{2+3i}$ なんて関数はいったい何？？)，できなくはありません．詳しくは大学で学んでください．それまで待てない，我慢できない人は赤阪までご相談ください．

【例】　$y = x^x$ $(x > 0)$ を微分せよ．

考え方　くれぐれも

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$$

の公式をそのまま真似して，

$$(x^x)' = x \cdot x^{x-1}$$

とやらないように．

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$$

の公式は **α が定数の場合でしか使えません．**

こういうときに，log の力を借りるのです．まさに『対数微分法』の真骨頂です．

解　両辺の絶対値の自然対数をとると，

$$\log|y| = \log|x^x|$$
$$\log|y| = x \cdot \log|x|$$

両辺を x で微分して，

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= x' \cdot \log|x| + x \cdot (\log|x|)' \\ &= 1 \cdot \log|x| + x \cdot \frac{1}{x} \\ &= \log|x| + 1\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}y' &= y\left(\log|x| + 1\right) \\ &= x^x\left(\log|x| + 1\right)\end{aligned}$$

■

注　「両辺の絶対値の自然対数を取ると」と丁寧に明記してありますが，この問題の場合は，最初から $x > 0$ となっているので，絶対値を付けなくても「真数 > 0」に引っかかることはありませんが，安全策のために絶対値を付けて計算しました．

実際問題として，$y = f(x)^{g(x)}$ タイプの微分を行うために，両辺に自然対数 log をとらねばならない場合は，始めから $f(x) > 0$ と指示されることがほとんどなので，あんまり意識することはありません．

▷Point◁

> 指数部分が x の関数になっている関数，つまり $y = f(x)^{g(x)}$ のタイプの関数は，『対数微分法』でしか微分できない．

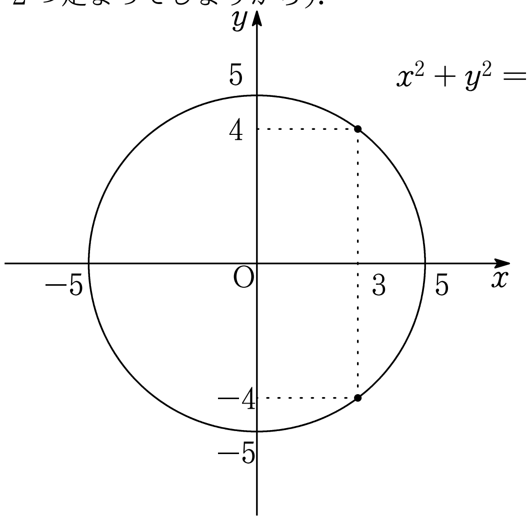
$y = f(x)^{g(x)}$ のタイプの関数は，そんなに出題頻度は高くありませんが，「log をつけてから微分する」ということをココロに留めておきましょう．

10.2 陰関数微分法

陰関数とは，単純にいうと $y=\cdots\cdots$ の形で書かれていない関数，つまり $F(x,\ y)=0$ で定められる関数のことです．このような形の関数の微分について考えよう．

【例】 $x^2+y^2=25$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

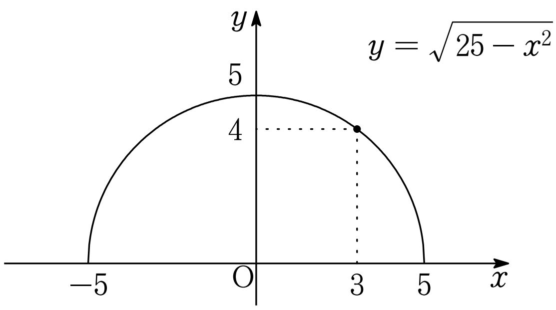
まず始めに確認しますが，$x^2+y^2=25$ は関数ではありません (たとえば $x=3$ のとき $y=\pm 4$ と 2 つ定まってしまうから)．

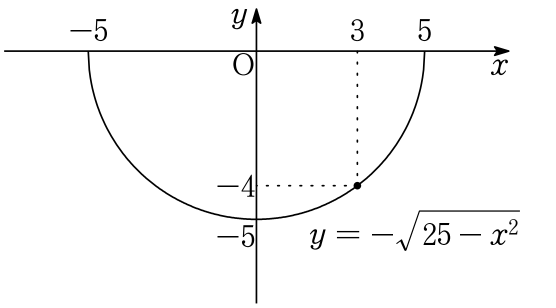


しかし，$x^2+y^2=25$ より，$y=\pm\sqrt{25-x^2}$．

つまり，

$$x^2+y^2=25 \iff \begin{cases} y=\sqrt{25-x^2} \\ y=-\sqrt{25-x^2} \end{cases}$$





円を上下半分に分けると，それぞれ y が x の関数になります．$x^2+y^2=25$ の陰に，2 つの関数 $y=\sqrt{25-x^2}$ と $y=-\sqrt{25-x^2}$ がかくれていたわけです．このことが「陰関数」といわれる所以です．

したがって，$x^2+y^2=25$ から $\dfrac{dy}{dx}$ を求める場合，2 つの関数 $y=\sqrt{25-x^2}$ と $y=-\sqrt{25-x^2}$ のそれぞれの場合を考えねばなりません．

(i) $y=\sqrt{25-x^2}$ のとき．

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{1}{2\sqrt{25-x^2}}\cdot(25-x^2)'\\&=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}\\&=-\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}\\&=-\frac{x}{y}\end{aligned}$$

(ii) $y=-\sqrt{25-x^2}$ のとき．

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=-\frac{1}{2\sqrt{25-x^2}}\cdot(25-x^2)'\\&=\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}\\&=-\frac{x}{-\sqrt{25-x^2}}\\&=-\frac{x}{y}\end{aligned}$$

なんと，不思議なことに，$y=\sqrt{25-x^2}$ の場合も $y=-\sqrt{25-x^2}$ の場合もいずれも

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

となっています．ということは，わざわざ 2 つに分けて微分しなくてもよさそうです．

次のように微分します．

解　$x^2+y^2=25$ の両辺を x で微分すると，

$$2x+2yy'=0$$
$$2yy'=-2x$$
$$y'=-\frac{x}{y}$$

■

この微分方法を『陰関数微分法』といいます．

注　$(y^2)'=2yy'$ について．

なぜ，y^2 を x で微分すると $2yy'$ になるか分かりますか．それは，もともと y 自体が x の関数だからです (だって，$y=\pm\sqrt{25-x^2}$ ですよ)．

$$(\{f(x)\}^2)'=2f(x)\cdot f'(x)$$

という公式はすでに知っているはず．$f(x)$ は x の関数です．だから，y が x の関数なので，この公式で $f(x)$ を y に置き換えた，

$$(y^2)'=2yy'$$

という式が成立するのです．

参考　今回の微分した結果に x と y が混じっていることに違和感を感じるかもしれません．ましてや，円 $x^2+y^2=25$ は関数ではないし，ゴーインに 2 つに分割して，$y=\sqrt{25-x^2}$ と $y=-\sqrt{25-x^2}$ という 2 つの異なる関数とみなして微分して，出てきた結果が $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$．「じゃあ，この y って，$y=\sqrt{25-x^2}$ と $y=-\sqrt{25-x^2}$ のどっちやねん！」って混乱しそうになります．このへんのところをきちんと納得するには，『陰関数』というものをもう少し詳しく学ぶ必要があります．「円は関数ではないが局所的に眺めれば関数になっており，その局所的な範囲内の点 $(x,\ y)$ における微分が $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ である」ということなんですが・・・・よくわかんないと思います．今は「まあ，なんとなく」でかまいません．大学でやってください．

他の関数で『陰関数微分法』に慣れよう．

(1)　$x^2y^3=1$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

(2)　$x^2+3xy-y^2=1$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

解　それぞれ両辺を x で微分する

(1)

$$(x^2)'y^3+x^2(y^3)'=0$$
$$2xy^3+x^2\cdot 3y^2y'=0$$
$$y'=-\frac{2xy^3}{x^2\cdot 3y^2}=-\frac{2y}{3x}$$

(2)

$$2x+3(x'y+xy')-2yy'=0$$
$$2x+3(y+xy')-2yy'=0$$
$$2x+3y+(3x-2y)y'=0$$
$$y'=-\frac{2x+3y}{3x-2y}$$

■

この『陰関数微分法』の最大のメリットは，次のような問題が簡単に解けることです．

(1)　$x^2+y^2=25$ 上の点 $(3,\ 4)$ における接線の傾きは？

(2)　$x^2+y^2=25$ 上の点 $(3,\ -4)$ における接線の傾きは？

考え方　まともにやるなら，

(1) では点 $(3,\ 4)$ は円の上部にあるので，関数 $y=\sqrt{25-x^2}$ を考えて，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{\sqrt{25-x^2}}$ に $x=3$ を代入して，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3}{4}$．

(2) では点 $(3,\ -4)$ は円の下部にあるので，関数 $y=-\sqrt{25-x^2}$ を考えて，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{\sqrt{25-x^2}}$ に $x=3$ を代入して，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3}{4}$．

としますが，『陰関数微分法』を用いると，円の上部，下部に関わらず $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ なので・・・

解　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ なので，

(1)　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ に $x=3,\ y=4$ を代入して，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3}{4}$．

(2)　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ に $x=3,\ y=-4$ を代入して，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3}{4}$．

■

いちいち関数を区別しなくて良いので便利だと思いませんか？

10.3　媒介変数表示された関数の微分法

次のように，x と y がそれぞれ t の関数として表現されている式を考えます．

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

本来，x と y の間の関数関係を考えたいのに，x と t の関数関係，y と t の関数関係として表現されています．つまり，x と y **の間の直接的な関数関係ではなく，いわば間接的に** (t **を媒介として**)x **と** y **の関数関係を表現してある**わけです．このように表現された関数関係を「t を媒介変数として表示された関数」といいます．

注 別に媒介変数は t とは限らず，他の文字 (θ とか) の場合もあります．

x と y の関数関係が分からなくても，次の公式により，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めることができます．

▷Point◁(媒介変数表示の微分公式)

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

のとき，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

である．

この公式は，見た感じは単なる「分数の約分っぽい感じ」に過ぎませんが，x と y の直接的な関数関係が分からなくても，x と t の関数関係と y と t の関数関係の微分から，$\dfrac{dy}{dx}$ が求められるという画期的なことを表現しています．

いちおう証明しますが，教科書の証明はいまひとつよくわからないので，次のようなイメージで理解すればよいでしょう．ポイントは「逆関数の微分」と「合成関数の微分」です．

$\boxed{\text{考え方}}$　まず，x は t の関数なので，$\dfrac{dx}{dt}$ が定まる．

$$x \xrightarrow{\quad \frac{dt}{dx} \quad} t$$

$$x \xleftarrow[\quad \frac{dx}{dt} \quad]{} t$$

また逆に t が x の関数と考えられるとき，逆関数の微分公式より，$\dfrac{dt}{dx}$ が定まり，$\dfrac{dx}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = 1$ が成立する．

したがって，合成関数の微分より，

$$x \xrightarrow{\quad \frac{dy}{dx} \quad} y$$

$$x \xrightarrow[\quad \frac{dt}{dx} \quad]{} t \xrightarrow[\quad \frac{dy}{dt} \quad]{} y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

逆関数の微分公式より，$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dt}}$ なので，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

が成立する．

■

【例 1】

$$\begin{cases} x = 2t & \cdots\cdots ① \\ y = t^2 + 3t & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

解

$x = 2t$ より，$\dfrac{dx}{dt} = 2$.

$y = t^2 + 3t$ より，$\dfrac{dy}{dt} = 2t + 3$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{2t+3}{2} = t + \frac{3}{2} = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$$

参考　この問題の場合は，① を変形して ② に代入することで x と y の間の直接的な関係がわかるので，普通に $\dfrac{dy}{dx}$ を求めることができます．つまり，

別解

① より，$t=\dfrac{x}{2}$．② に代入して，

$y=\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+3\cdot\dfrac{x}{2}=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{3}{2}x$

したがって，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{2}$.

■

しかしながら，必ずしも，媒介変数 t を消去して x と y の関係が作れるとは限らないので，この方法は例外中の例外であるといえます．

注　この媒介変数表示された関数は，実は単なる 2 次関数だったわけです．

次の【例 2】では，t を消去して x と y だけの関数関係が作れないので，公式にしたがって $\dfrac{dy}{dx}$ を求めるしかありません．

【例 2】

$$\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1+\cos 2t \end{cases}$$

のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

解

$x=t-\sin t$ より，$\dfrac{dx}{dt}=1-\cos t$.

$y=1+\cos 2t$ より，$\dfrac{dy}{dt}=-2\sin 2t$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-2\sin 2t}{1-\cos t}$$

■

注　【例 1】のように，$\dfrac{dy}{dx}$ の式で t を消去して x の関数に変形することはできません．媒介変数の微分法では，むしろこれがフツーなので，このまま放っておいてかまいません．

例 題　x の関数 y が，t を媒介変数として，$x=\cos t+t\sin t$，$y=\sin t-t\cos t$ として表されているとき，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数として表せ．

考え方　これは非常に質問の多い問題です．

まず記号の意味ですが，

$\dfrac{dy}{dx}$　……　y を x で 1 回微分する

$\dfrac{d^2y}{dx^2}$　……　y を x で 2 回微分する

つまり，y'' を求めよというわけです．言うまでもなく，y'' は y' をもう 1 回 x で微分したものです．

$\dfrac{dy}{dx}=\tan t$ になるところまでは大丈夫だと思います．$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ とは，$\dfrac{dy}{dx}$ を x でもう 1 回微分することなので，要するに，

$\tan t$ を x で微分すること

がこの問題の目標になりますね．$\tan x$ を x で微分したら $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ ですが，$\tan t$ を x で微分する場合，合成関数の微分公式を使うことになります．

解

$x=\cos t+t\sin t$ より，

$\dfrac{dx}{dt}=-\sin t+\sin t+t\cos t=t\cos t$.

$y=\sin t-t\cos t$ より，

$\dfrac{dy}{dt}=\cos t-(\cos t-t\sin t)=t\sin t$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t\sin t}{t\cos t}=\tan t (=Y \text{ とおく})$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}&=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dY}{dx}=\frac{\frac{dY}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\\&=\frac{(\tan t)'}{t\cos t}\\&=\frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{t\cos t}\\&=\frac{1}{t\cos^3 t}\end{aligned}$$

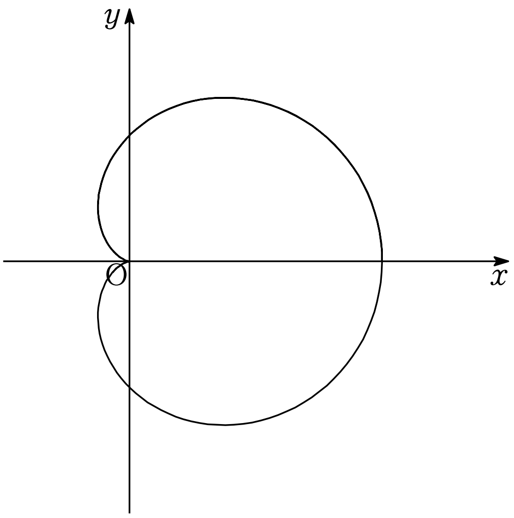
■

参考 そもそも媒介変数表示とは，複雑な曲線を表すために導入された概念です．直線や放物線，3 次関数のグラフなどの単純な曲線は媒介変数表示などせずとも，$y=f(x)$ の形に簡単に表わすことができますが，世の中には，まったくワケのわからない曲線がたくさんあり，$y=f(x)$ の形にかけない場合が多いのです．

いくつか例を紹介すると，

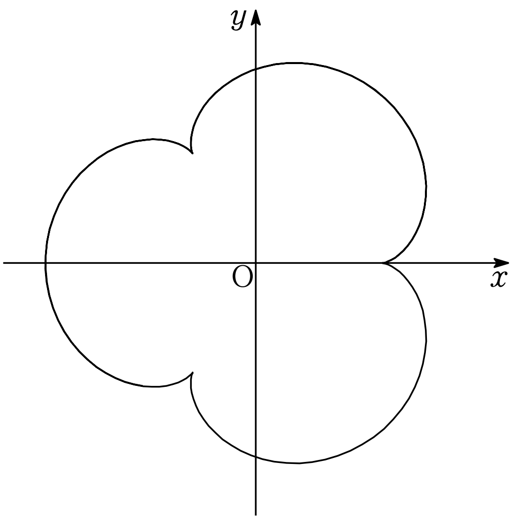
カージオイド

$$\begin{cases} x=(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y=(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$



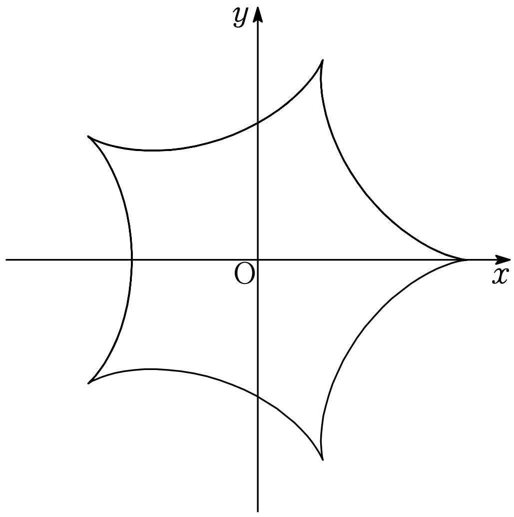
外サイクロイド

$$\begin{cases} x=4\cos\theta-\cos 4\theta \\ y=4\sin\theta-\sin 4\theta \end{cases}$$



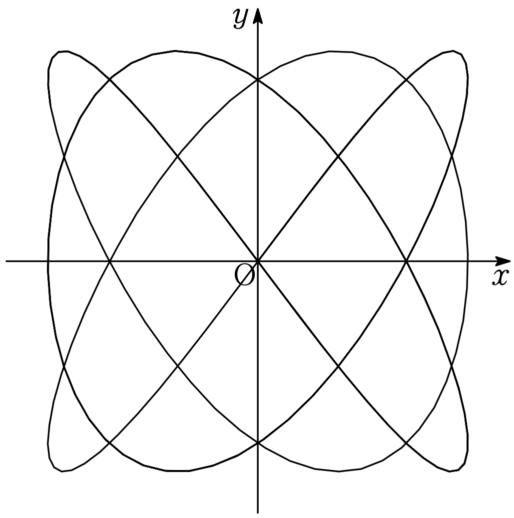
内サイクロイド

$$\begin{cases} x=4\cos\theta+\cos 4\theta \\ y=4\sin\theta+\sin 4\theta \end{cases}$$



リサージュ図形

$$\begin{cases} x=\sin 3\theta \\ y=\sin 4\theta \end{cases}$$



なぜこのような不思議な曲線になるのでしょうか．見ているだけでワクワクしませんか？

このような曲線にまつわる問題（接線や面積を求めたりする問題）は，またそのうち紹介します．

今はただ機械的に微分できればそれでよいです．

10.4　高次導関数

関数を微分するのは，なにも 1 回だけとは限りません．

$$f(x) \longrightarrow f'(x) \longrightarrow f''(x) \longrightarrow f'''(x) \longrightarrow f''''(x) \longrightarrow \cdots\cdots$$

と何回でも微分することもできます．その都度，$'$(ダッシュ) が増えていくわけですが，あんまり多くなるとわけわかんなくなるので，$f''''(x)$ を $f^{(4)}(x)$，$f'''''(x)$ を $f^{(5)}(x)$ などと書いたりもします．

実際に，何回も微分を繰り返すと，例えば，

$$x^5 \longrightarrow 5x^4 \longrightarrow 20x^3 \longrightarrow 60x^2 \longrightarrow 120x \longrightarrow 120 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots\cdots$$

$$\sin x \longrightarrow \cos x \longrightarrow -\sin x \longrightarrow -\cos x \longrightarrow \sin x \longrightarrow \cos x \longrightarrow \cdots\cdots$$

$$e^x \longrightarrow e^x \longrightarrow e^x \longrightarrow e^x \longrightarrow e^x \longrightarrow e^x \longrightarrow \cdots\cdots$$

などとなります．

2 回微分した関数を第 2 次導関数，3 回微分したものを第 3 次導関数 $\cdots$ などと言います．

表記記号がちょっとややこしくて，

第 2 次導関数　y''，　$f''(x)$，　$\dfrac{d^2y}{dx^2}$，　$\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$

第 3 次導関数　y'''，　$f'''(x)$，　$\dfrac{d^3y}{dx^3}$，　$\dfrac{d^3}{dx^3}f(x)$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

第 n 次導関数　$y^{(n)}$，　$f^{(n)}(x)$，　$\dfrac{d^ny}{dx^n}$，　$\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$

と表現します．特に後半 2 つの表記方法に注意してください．

✎注　$\dfrac{d^ny}{dx^n}$ という表記に違和感をもつ人が多いようです．dx^n とは $(dx)^n$ のことです．(　) を省略して書いてあるだけです．

次のように考えると良いでしょう．

$y' = \dfrac{dy}{dx}$　$\longleftarrow$ これは問題ないでしょう．通常の 1 回微分です．

$y'' = (y')' = \dfrac{dy'}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d^2y}{(dx)^2} = \dfrac{d^2y}{dx^2}$　となります．

✎注　実際には，第 3 次導関数ぐらいまでしか登場しません．だから，高次導関数なんて別にどうでもいいです．記号の意味さえ分かってればそれでよいです．

参考　高次導関数は大学の数学で頻繁に登場します．一番有名なのは次の定理です．

無限回微分可能な関数 $f(x)$ について

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots\cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots\cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

を $f(x)$ の $x = a$ での**テイラー展開**という．特に，$a = 0$ としたものを**マクローリン展開**という．

この定理に興味を持った人は，$\sin x$，$\cos x$，e^x，$\log(1+x)$ をマクローリン展開してみよう．

11　微分公式のまとめ

これまでに学習した微分の公式をまとめておこう．とにかく「正確に微分できる」ことが大切です．あんまりマニアックな関数は無視してよいので，**典型的な関数の微分を 100 %確実に微分できるようにしておくことです**．そのためには，以下の基本公式は全て完全に暗記しておく必要がありますね．なぜなら，どんな関数の微分もこれらの組合せに過ぎないからです．がんばって憶えよう．

11.1　全般的な微分公式

11.1.1　積の微分・商の微分

▷Point◁(積の微分)

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$$

▷Point◁(商の微分)

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

特に，　$\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$

11.1.2　合成関数の微分

▷Point◁(合成関数の微分)

$y = f(u)$，$u = g(x)$ がそれぞれ u，x の微分可能な関数であるとき，
合成関数 $y = f(g(x))$ も微分可能で，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

が成立する．

$$x \xrightarrow{\quad \frac{dy}{dx} \quad} y$$

$$x \xrightarrow[\frac{du}{dx}]{\qquad} u \xrightarrow[\frac{dy}{du}]{\qquad} y$$

11.1.3　逆関数の微分

▷Point◁(逆関数の微分)

y が x の関数であり，逆に，x もまた y の関数であるとき，

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy} = 1$$

が成立する．

$$x \xrightarrow{\quad \frac{dy}{dx} \quad} y$$

$$x \xleftarrow[\frac{dx}{dy}]{\qquad\quad} y$$

11.1.4　媒介変数表示の微分

▷Point◁(媒介変数表示の微分)

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

のとき，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

である．

11.2　基本関数の微分公式

▷Point◁(x^α の微分)

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad (\alpha \text{ は実数})$$

✐注　この公式で，$\alpha=-1$ のときと $\alpha=\dfrac{1}{2}$ の場合は頻繁に登場するので単独で憶えておくこと．

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}\qquad \left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

▷Point◁(三角関数の微分)

$$(\sin x)'=\cos x$$
$$(\cos x)'=-\sin x$$
$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$$

▷Point◁(指数関数の微分)

$$(e^x)'=e^x$$
$$(a^x)'=a^x\log a$$

▷Point◁(対数関数の微分)

$$(\log x)'=\frac{1}{x}$$
$$(\log|x|)'=\frac{1}{x}$$
$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\log a}$$
$$(\log_a|x|)'=\frac{1}{x\log a}$$

11.3　合成関数の微分公式

基本関数の微分公式において，x の代わりに $f(x)$ とした場合の関数の微分をまとめておこう．

ある部分を「ひとまとめ」に見てザックリ微分し，最後に「ひとまとめ」にした部分の微分をくっつける．が基本です．ですから，$f(x)$ を「ひとまとめ」に見てザックリ微分し，最後に $f'(x)$ をくっつけるだけなので，わざわざ憶える必要はありませんが，念のため．

▷Point◁($f(x)^\alpha$ の微分)

$$(f(x)^\alpha)'=\alpha f(x)^{\alpha-1}f'(x)$$

(α は実数)

✐注　この公式で，$\alpha=-1$ のときと $\alpha=\dfrac{1}{2}$ の場合は頻繁に登場するので単独で憶えておくこと．

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=-\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$
$$\left(\sqrt{f(x)}\right)'=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

▷Point◁(三角関数の微分)

$$(\sin f(x))'=\cos f(x)\cdot f'(x)$$
$$(\cos f(x))'=-\sin f(x)\cdot f'(x)$$
$$(\tan f(x))'=\frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$$

▷Point◁(指数関数の微分)

$$(e^{f(x)})'=e^{f(x)}\cdot f'(x)$$
$$(a^{f(x)})'=a^{f(x)}\log a\cdot f'(x)$$

▷Point◁(対数関数の微分)

$$(\log f(x))'=\frac{f'(x)}{f(x)}$$
$$(\log|f(x)|)'=\frac{f'(x)}{f(x)}$$
$$(\log_a f(x))'=\frac{f'(x)}{f(x)\log a}$$
$$(\log_a|f(x)|)'=\frac{f'(x)}{f(x)\log a}$$