

# 『ポツポツ和』が『ベツタリ和』に変わるとき



以前に配ったプリント『求積の原理』で説明したように、面積を求める根本的な原理は「細かく長方形に分割して寄せ集める」というものでした。

$y = x^2$  を例にとって考えると、区間  $0 \leq x \leq 1$  を  $n$  等分して長方形の面積の総和を計算すると、

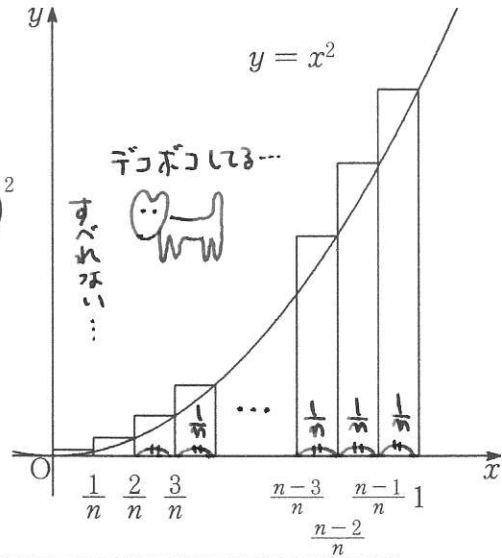
(長方形の面積の総和)

$$= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \left(\frac{n}{n}\right)^2$$

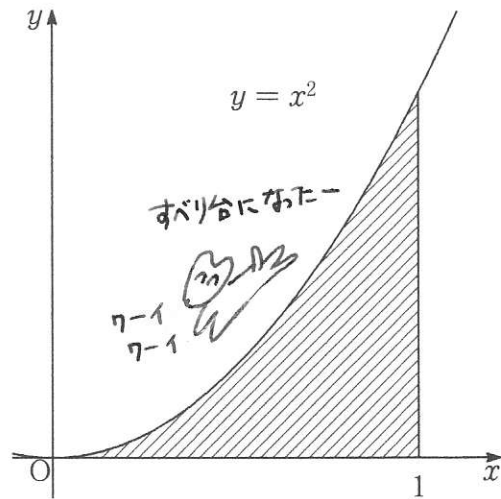
$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2$$

$$\int_0^1 x^2 dx$$

← 斜線部の面積



ここで、分割をさらに細かくする、つまり  $n \rightarrow \infty$  とすると



『ポツポツ和』  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2$  が、 $n \rightarrow \infty$  にした瞬間に『ベツタリ和』  $\int_0^1 x^2 dx$  になったわけです。

$$\text{ポツポツ和} \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \implies \int_0^1 x^2 dx \quad \text{ベツタリ和}$$

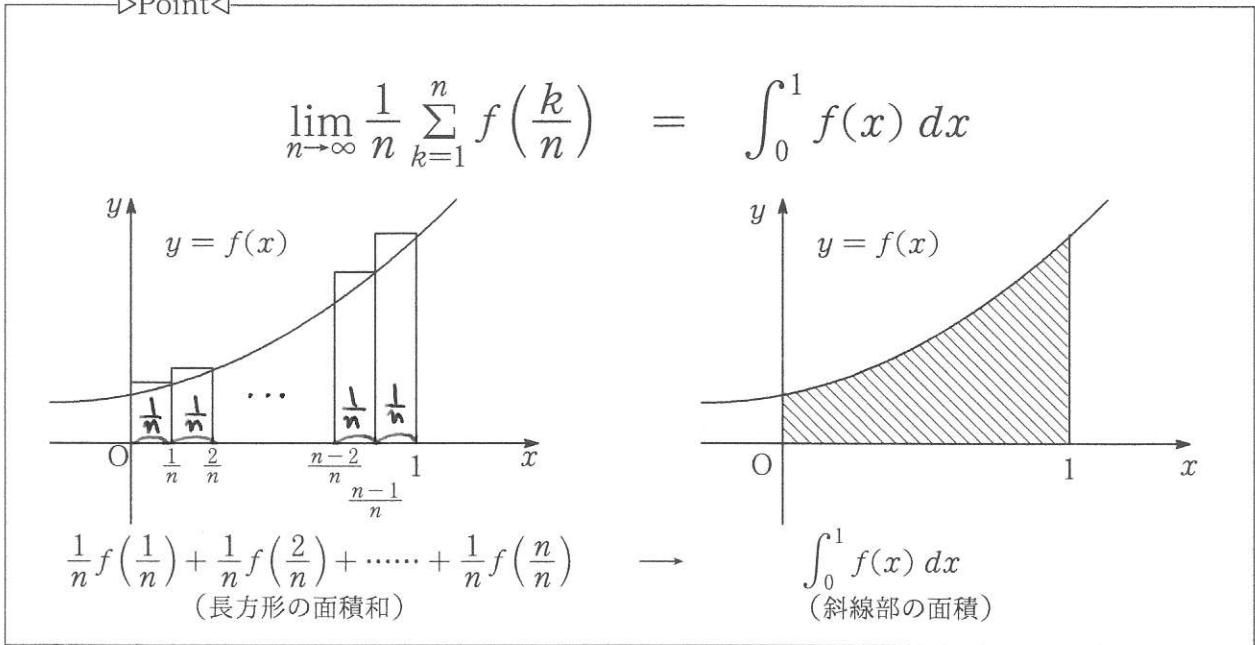
つまり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \int_0^1 x^2 dx$$

本来は全くちがうはずの  
2つの和が、 $n \rightarrow \infty$  に  
(た瞬間)に等しく  
なるといける。☺

一般に次の関係式が成立します。

▷Point◁



**考え方** 大抵の人は、この関係式を見るとビビります。lim や Σ, さらには ∫ まで、今までの役者が全部登場した感じです。盆と正月が一緒に来た感じ(って…違うか)。次のようにイメージしよう。

上の関係式のイメージ

まず、 $\frac{k}{n} = x$  とおくと、 $f\left(\frac{k}{n}\right) \implies f(x)$ . …… これは単なる文字の置き換えです。



また、 $dx$  とは究極に細かく分割したときの横幅のことだから、 $n \rightarrow \infty$  のとき、

$$\frac{1}{n} \implies dx$$

(デコボコ世界の横幅)                      (なめらか世界の横幅)

うまいことな.73~ なりほどーこのように対応するのね

さらに、 $1 \leq k \leq n$  のとき、 $\frac{1}{n} \leq \frac{k}{n} \leq 1$  なので、 $\frac{k}{n} = x$  とし、 $n \rightarrow \infty$  のとき  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  だから、

$k=1, 2, 3, \dots, n$   
( $1 \leq k \leq n$ )

$$\sum_{k=1}^n$$

この対応関係が最大のポイント

$$\int_0^1$$

$0 \leq x \leq 1$

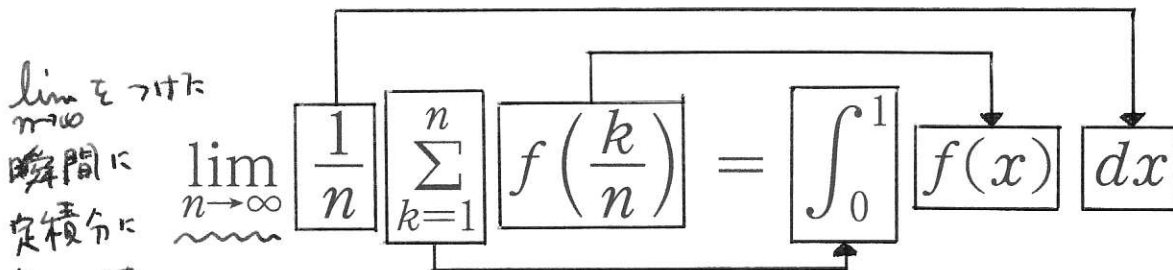
理由 ↓  
 $1 \leq k \leq n$  より  
 $\frac{1}{n} \leq \frac{k}{n} \leq 1$   
 ↓ ↓  $n \rightarrow \infty$   
 $0 \leq x \leq 1$  と対応

(デコボコ世界のポツポツ和) (なめらか世界のベツタリ和)  
 この対応がスゴイ

にそれぞれ変化したと考えるのです。

したがって、上の関係式の両辺の各部分が次のように対応していると考えられます。

∴  $0 \leq x \leq 1$  ←  
 ベツタリ和



この対応関係がとて大切ですよ

スゴイ スゴイ

このような対応関係をイメージすることが大切です。  
 感動しました…

うまく対応してるでしょ!